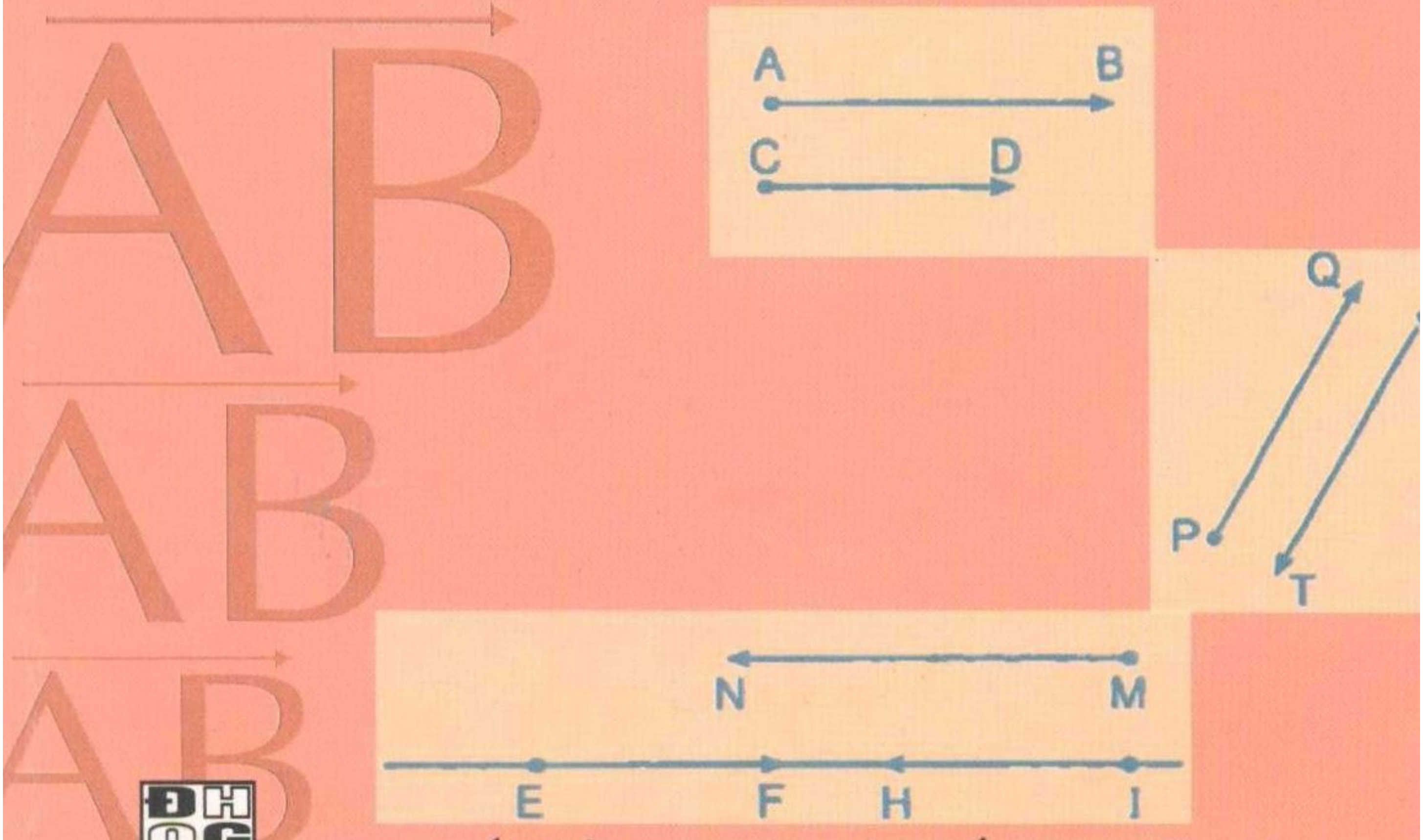
HÀN LIÊN HẢI - NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO - HOÀNG NGỌC ANH

Để học tốt
Toán 10


AB
AB
AB
A
B
C
D
Q
P
T
N
M
E
F
H
I

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀN LIÊN HẢI – NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO – HOÀNG NGỌC ANH

ĐỂ HỌC TỐT

TOÁN

10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai. Mệnh mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai. Kí hiệu các mệnh đề bởi các chữ in hoa A, B, C...

2. Kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$, ta có : $\overline{P}$ đúng khi P sai và $\overline{P}$ sai khi P đúng.

3. Một khẳng định chứa biến p(x) không phải là một mệnh đề, nhưng với mỗi giá trị của biến x (thuộc một tập X nào đó) ta được một mệnh đề.

4. • Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu: $P \Rightarrow Q$.

• Với P là một mệnh đề đúng thì :

Nếu Q đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng

Nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai

• Các định lí toán học thường là những mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói : P là giả thiết còn Q là kết luận của định lí, hoặc P là điều kiện đủ để có Q, hoặc Q là điều kiện cần để có P.

5. • Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

• Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương. Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là P tương đương Q, hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.

6. Kí hiệu $\forall$ đọc là "với mọi". Mệnh đề $\forall x \in X : p(x)$ là đúng có nghĩa là : với mọi x thuộc tập X mệnh đề p(x) là đúng.

7. Kí hiệu $\exists$ đọc là "có một" (tồn tại một) hay "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một).

Ví dụ 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là mệnh đề, khẳng định nào không phải là mệnh đề :

a) $5 - 7 = 1$; b) $2 + 3 > 0$; c) $3 - x = 8$.

Giải

a) Khẳng định này là một mệnh đề : đó là khẳng định sai.

b) Khẳng định này là một mệnh đề : đó là khẳng định đúng.

c) Khẳng định này không phải là mệnh đề vì không biết nó đúng hay sai do chưa biết x là bao nhiêu.

Ví dụ 2. Cho các mệnh đề sau :

a) A = "7 là một số nguyên tố" ;

b) B = "$9 < \sqrt{80}$ " ;

c) C = "8 chia hết cho 5".

Hãy phát biểu phủ định của chúng và xét tính đúng sai cua chúng.

Giải

a) $\overline{A}$ = "7 không phải là số nguyên tố" A đúng, $\overline{A}$ sai.

b) $\overline{B}$ = "$9 \geq \sqrt{80}$ " B sai, $\overline{B}$ đúng.

c) $\overline{C}$ = "8 không chia hết cho 5". C sai, $\overline{C}$ đúng.

Ví dụ 3. Tìm một giá trị của x thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ để p(x) trở thành một mệnh đề đúng (một mệnh đề sai) với :

a) p(x) = "$2x + 1 \leq x$" ;   b) p(x) = "$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$".

Giải

a) p(−2) = "$2.(-2) + 1 \leq -2$"= "$-3 \leq -2$" là mệnh đề đúng

p(0) = "$2.0 + 1 \leq 0$"= "$1 \leq 0$" là mệnh đề sai.

b) p(1) = "$1^3 - 2.(1)^2 - 1 + 2 = 0$" = "$0 = 0$" là mệnh đề đúng

p(3) = "$3^3 - 2.(3)^2 - 3 + 2 = 0$" = "$8 = 0$" là mệnh đề sai.

Ví dụ 4. Trong các trường hợp sau, hãy lập các mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ và xét tính đúng, sai của mệnh đề đó.

a) P = "3.5 = 17" ; Q = $\pi \geq 10$"

b) P = "Tam giác ABC là đều" ; Q = "hai cạnh AB và BC của tam giác ABC bằng nhau".

Giải

a) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu 3.5 = 17 thì $\pi \geq 10$". Mệnh đề này đúng vì P là sai.

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu $\pi \geq 10$ thì 3.5 = 17 ". Mệnh đề này đúng vì Q sai.

b) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu tam giác ABC là đều thì hai cạnh AB và BC của nó bằng nhau". Mệnh đề này đúng.

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu hai cạnh AB và BC tam giác ABC bằng nhau thì tam giác đó đều". Mệnh đề này sai (Nếu AB = BC thì tam giác ABC là cân, nhưng chưa chắc đã là đều).

Ví dụ 5. Với mỗi mệnh đề sau, hãy lập mệnh đề phủ định của nó và xét tính đúng sai của mệnh đề này :

a) $\exists x \in [-1 ; 3] : x^2 + 5x - 24 = 0$;   b) $\forall x \in Q : x^2 + 3x \neq 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề đã cho là mệnh đề :

$$\forall x \in [-1 ; 3] : x^2 + 5x - 24 \neq 0.$$

Mệnh đề này sai (vì khi $x = 3 \in [1 ; 3]$ thì $3^2 + 5.3 - 24 = 0$).

b) Phủ định của mệnh đề đã cho là mệnh đề : $\exists x \in Q : x^2 + 3x = 0$. Mệnh đề này đúng (vì khi $x = 0 \in Q$ thì $0^2 + 3.0 = 0$).

III. BÀI TẬP

1.1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là mệnh đề, khẳng định nào không phải là mệnh đề :

a) $5^2 + 3 = 10$; b) $4x + 7 = 5$;

c) $\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ ; d) 7 – 1 là một số quá lớn ;

e) $x^2 - 2x > 0$.

1.2. Hãy phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của các phủ định này :

a) x = 1 là một nghiệm của phương trình $\frac{2x^3 + x^2 + 3x - 6}{x^2 - 1} = 0$.

b) $\frac{5+21}{3} > 9$; c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 6$; d) $8 - 3 = 5$.

1.3. Cho tứ giác ABCD là hình bình hành. Lập các mệnh đề P ⇒ Q và Q ⇒ P, xét tính đúng sai của chúng, trong các trường hợp sau:

a) P = "ABCD là hình thoi" ; Q = "AB = BC"

b) P = "ABCD là hình vuông" ; Q = "ABCD là hình chữ nhật"

c) P = "Hai đường chéo vuông góc với nhau" ; Q = "ABCD là hình vuông"

d) P = "BC = CD" ; Q = "$\widehat{A} = 90^o$"

1.4. Trong bài 1.3. a) hãy phát biểu các mệnh đề được lập ra dưới dạng "điều kiện cần", "điều kiện đủ", "điều kiện cần và đủ".

Trong trường hợp này P ⇔ Q là đúng hay sai ?

1.5. Tìm một giá trị của $x \in R$ để mệnh đề p(x) trở thành mệnh đề đúng với :

a) p(x) = "$x^2 + 9x - 10 > 0$" ; b) p(x) = "$2x - 7 \geq 3x - 1$"

c) p(x) = "$6x + 2 = 3$" ; d) p(x) = "$(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0$".

1.6. Tìm một giá trị của $x \in \mathbb{R}$ để mệnh đề p(x) trở thành mệnh đề sai với các trường hợp trong bài 1.5.

1.7. Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của nó

a) $\forall \Delta ABC : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 182^o$; b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 = 0$.

c) $\exists q \in \mathbb{Q} : q > \pi$; d) $\exists x \in \mathbb{Q}+ : x^2 > \frac{3}{x^2 + 1}$

e) $\forall m \in \mathbb{Z} : m^2 + 3m > 0$; g) $\exists x \in [0, 1] : x^2 - 4 = 0$.

1.8. Dùng các kí hiệu ∀, ∃ để lập các phủ định của các mệnh đề ở bài 1.7. Phát biểu chúng thành lời và xét tính đúng, sai của chúng.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1.1. a) Là một mệnh đề vì đó là khẳng định sai.

b) Không phải là mệnh đề (tính đúng sai của khẳng định tuỳ thuộc vào giá trị của x).

c) Là một mệnh đề vì đó là khẳng định sai.

d) Không phải là một mệnh đề

e) Không phải là một mệnh đề (khẳng định phụ thuộc vào giá trị của x).

1.2. Phủ định của các mệnh đề tương ứng sẽ là

a) $x = 1$ không phải là một nghiệm của phương trình $\frac{2x^3 + x^2 + 3x - 6}{x^2 - 1} = 0$.

Mệnh đề này là đúng vì $x = 1$ không thoả mãn điều kiện của phương trình.

b) $\frac{5+21}{3} \leq 9$. Mệnh đề này là đúng

c) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 \neq 6$. Mệnh đề đúng

d) $8 - 3 \neq 5$. Mệnh đề này sai.

1.3. a) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu ABCD là hình thoi thì AB = BC". Mệnh đề đúng.

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu AB= BC thì ABCD là hình thoi". Mệnh đề này đúng (hình bình hình có hai cạnh liên tiếp bằng nhau)

b) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu ABCD là hình vuông thì nó là hình chữ nhật". Mệnh đề này là đúng

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu ABCD là hình chữ nhật thì nó là hình vuông". Mệnh đề sai (có hình chữ nhật không phải là hình vuông).

c) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau thì nó là hình vuông". Mệnh đề sai (hình thoi cũng có hai đường chéo vuông góc với nhau)

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu ABCD là hình vuông thì các đường chéo của nó vuông góc với nhau ". Mệnh đề này là đúng.

d) $P \Rightarrow Q$ = "Hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau thì nó là hình chữ nhật". Mệnh đề sai (hình thoi chưa chắc là hình chữ nhật).

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu ABCD là hình chữ nhật thì nó là hình thoi". Mệnh đề sai (không phải hình chữ nhật nào cũng là hình thoi).

1.4. a) $P \Rightarrow Q$ có thể phát biểu : "điều kiện cần để hình bình hành là hình thoi là nó có hai cạnh liên tiếp bằng nhau" (hoặc "điều kiện đủ để hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau là nó là hình thoi")

$Q \Rightarrow P$ có thể phát biểu : "điều kiện đủ để hình bình hành là hình thoi là nó có hai cạnh liên tiếp bằng nhau" (hoặc "điều kiện cần để hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau là nó là hình thoi")

$P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu : "Điều kiện cần và đủ để hình bình hành là hình thoi là nó có hai cạnh liên tiếp bằng nhau"

Theo 1.3 a) $P \Leftrightarrow Q$ là đúng.

1.5. a) $x = 2$; b) $x = -10$; c) $x = \frac{1}{6}$; d) $x = -1$.

1.6. a) $x = 0$; b) $x = 0$; c) $x = 0$; d) $x = 0$.

1.7. a) Với mọi tam giác tổng các góc trong bằng 182^0. Mệnh đề sai.

b) Với mọi số thực x ta có $x^3 + x^2 = 0$. Mệnh đề sai.

c) Có ít nhất một số hữu tỉ : $q > \pi$ Mệnh đề đúng. (chẳng hạn lấy $q = \frac{24}{7}$)

d) Tồn tại một số thực không âm x mà $x^2 > \frac{3}{x^2+1}$. Mệnh đề đúng. (chẳng hạn lấy $x = 2$)

e) Với mọi số nguyên m có : $m^2 + 3m > 0$. Mệnh đề sai. (chẳng hạn với $m = -1$ có $(-1)^2 + 3(-1) = -2 < 0$)

g) Có ít nhất một số thực x thuộc đoạn [0, 1] sao cho $x^2 - 4 = 0$. Mệnh đề sai. ($x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$ không thuộc đoạn [0 ; 1]

1.8. Phủ định của các mệnh đề ở bài 1.7.

a) $\exists \Delta ABC : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \neq 182^0$ = "có ít nhất một tam giác với tổng các góc trong khác 182^0". Đây là mệnh đề đúng.

b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 \neq 0$ = "Tồn tại số thực x sao cho $x^3 + x^2 \neq 0$". Mệnh đề đúng (chẳng hạn lấy $x = 1$)

c) $\forall q \in \mathbb{Q} : q \leq \pi$ = "mọi số hữu tỉ đều không lớn hơn π". Mệnh đề này là sai.

d) $\forall x \in \mathbb{R}+ : x^2 \leq \frac{3}{x^2+1}$ = "Với mọi số thực x có $x^2 \leq \frac{3}{x^2+1}$". Mệnh đề này sai.

e) $\forall m \in \mathbb{Z} : m^2 + 3m \leq 0$ = "Có ít nhất một số nguyên m sao cho $m^2 + 3m \leq 0$". Mệnh đề này đúng.

g) $\forall x \in [0, 1] : x^2 - 4 \neq 0$ = "Mọi số thực x trong đoạn [0 ; 1] đều thoả mãn $x^2 - 4 \neq 0$" Mệnh đề này đúng.

§2. TẬP HỢP

1. • Để chỉ a là một phần tử của tập A, ta viết $a \in A$. Để chỉ a không phải là một phần tử của tập A, ta viết $a \notin A$. (hoặc $a \overline{\in} A$).

• Có thể xác định một tập hợp bằng hai cách : Liệt kê các phần tử của nó ; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

• Tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$, là tập không chứa phần tử nào.

2. • Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, thì ta nói A là một tập con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B, hoặc B chứa A, hoặc B bao hàm A).

• $A \subset A, \forall A$; $A \subset B$ và $B \subset C \Rightarrow A \subset C$; $\varnothing \subset A, \forall A$.

• $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3. • Tập C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B, kí hiệu là $C = A \cap B$.

• Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B, kí hiệu là $C = A \cup B$.

• Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B, kí hiệu là $C = A \setminus B$.

• Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu C_AB.

4. Các tập hợp số đã học :

• Tập hợp các số tự nhiên : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$; $N^* = \{1, 2, 3,...\}$

• Tập hợp các số nguyên : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$;

• Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số biểu diễn được dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn (tức là các số vô tỉ)..

Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số và ngược lại.

5. Trong toán học thường gặp các tập con sau của tập R :

Đoạn $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Nửa khoảng

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Khoảng

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a)] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$(-\infty ; +\infty) = \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Cho các tập hợp sau

a) Tập hợp A các nghiệm của phương trình $(x + 1)(x + 3)(x - \frac{1}{2}) = 0$

b) Tập $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 50\}$

Hãy liệt kê tất cả các phần tử của chúng.

Giải. a) $A = \{-3 ; -1 ; \frac{1}{2}\}$

b) $B = \{-7 ; -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Ví dụ 2. Cho tập hợp $A = \{-3, 0, 2\}$.

a) Hãy tìm tất cả các tập con của nó ; b) Tìm phần bù của $B = \{0\}$ trong A

Giải

a) Các tập con của A là : $\varnothing$, $\{-3\}$, $\{0\}$, $\{2\}$, $\{-3, 0\}$, $\{-3, 2\}$, $\{0, 2\}$, $\{-3, 0, 2\}$ (A có 8 tập con).

b) Ta thấy $B \subset A$ và $C_A B = A \setminus B = \{-3, 2\}$

Ví dụ 3. Gọi T là tập hợp các khối lớp của trường THPT Bình Minh, M là tập hợp các lớp khối 10, N là tập hợp các lớp khối 11 và L là tập hợp các lớp khối 12. Hãy xác định các tập hợp sau :

a) $M \cup N \cup L$; b) $M \setminus L$; c) $T \cap N$; d) $N \cap L$;

e) $C_T M$; g) $C_T(N \cup L)$; h) $M \cap N$

Giải. a) $M \cup N \cup L = T$; b) $M \setminus L = M$;

c) $T \cap N = N$; d) $N \cap L = \varnothing$;

e) $C_T M = N \cup L$; g) $C_T(N \cup L) = M$; h) $M \cap N = \varnothing$.

Ví dụ 4. Mọi học sinh của lớp 10D đều thích học hoặc môn Văn hoặc môn Toán. Biết rằng có 32 học sinh thích học môn Toán, 27 học sinh thích học môn Văn và 8 học sinh thích học cả hai môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10D có bao nhiêu học sinh ?

Giải. Gọi V là tập các học sinh thích học môn Văn, T là tập các học sinh thích học môn Toán. Theo đầu bài mọi học sinh đều thích học hoặc môn Văn hoặc môn Toán nên $V \cup T$ là tập hợp học sinh của lớp 10D. Để xác định số phần tử của $V \cup T$ ta xác định số phần tử của V (có 27 học sinh) và số phần tử của T (có 32 học sinh). Nhưng khi đó số học sinh vừa thích học môn Văn vừa thích học môn Toán (tập $V \cap T$) được tính hai lần (số đó là 8 học sinh). Vậy số phần tử thuộc $V \cup T$ là : $32 + 27 = 51$. Lớp 10D có 51 học sinh.

Ví dụ 5. Cho các tập $\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty)$; $\mathbb{R}^*_+ = (0 ; +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty ; 0]$; $\mathbb{R}^*_- = (-\infty ; 0)$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hãy xác định các tập sau :

a) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*_+$; b) $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; c) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+$; d) $\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{R}^*_-$ e) $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}_+$

Giải. a) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*_+ = (0 ; +\infty) = \mathbb{R}^*_+$; b) $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$; d) $\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{R}^*_- = \{0\}$; e) $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^*_-$

Ví dụ 6. Xác định các tập số sau và biểu diễn chúng trên trục số

a) $(-4 ; 2] \cap [0 ; 4)$; b) $(0 ; 3) \cup [1 ; 4]$;

c) $[-4 ; 3] \setminus [-2 ; 1]$; d) $\mathbb{R} \setminus [1 ; 3]$

Giải. a) $(-4 ; 2] \cap [0 ; 4) = [0 ; 2]$;

b) $(0 ; 3) \cup [1 ; 4] = (0 ; 4]$

c) $[-4 ; 3] \setminus [-2 ; 1] = [-4 ; -2) \cup (1 ; 3]$

d) $\mathbb{R} \setminus [1 ; 3] = (-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty)$

II. BÀI TẬP

2.1. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp sau :

a) Tập A các nghiệm của phương trình $(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 10x - 11) = 0$

b) Tập $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x(x - 3) \le 8\}$.

c) Tập $C = \{2z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}, -2 \le z \le 4\}$.

d) Tập $D = \left\{\dfrac{n}{n^3 - 9} \middle| n \in \mathbb{N}, 2 \le n \le 5\right\}$.

2.2. Tìm tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp sau :

a) $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}\right\}$ b) $B = \left\{\dfrac{5}{4}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{17}{16}, \dfrac{26}{25}, \dfrac{37}{36}, \dfrac{50}{49}\right\}$.

2.3. Biết rằng A là tập các hình tứ giác, B là tập các hình bình hành, C là tập các hình chữ nhật, D là tập các hình thoi và E là tập các hình vuông.

a) Hãy dùng kí hiệu "$\subset$" để nêu mối quan hệ giữa năm tập trên.

b) Phát biểu bằng lời và nêu ý nghĩa các tập sau :

$$C_A B \ ; \ C_B D \ ; \ C \cap D \ ; \ C_B(C \cup D)$$

2.4. Cho ba tập hợp $A = \{-1, 0, 2, 4, 6, 7\}$; $B = \{-3, 2, 6, 8\}$; $C = \{1, 8, 9\}$

a) Hãy xác định các tập sau :

$$A \cup B \cup C \ ; \ A \cap C \ ; \ B \cap C \ ; \ A \cap B \ ; \ B \setminus C \ ; \ C \setminus B$$

b) Hãy tìm tất cả các tập con của C. Số các tập con đó là bao nhiêu ?

2.5. Mỗi thành viên của câu lạc bộ văn nghệ đều tham gia ít nhất vào một nhóm, nhưng không có ai tham gia đồng thời vào cả ba nhóm : Hát, Múa và Thơ. Biết rằng có 50 người tham gia nhóm Hát, 30 người tham gia nhóm Múa và 20 người tham gia nhóm Thơ, trong đó 10 người tham gia cả hai nhóm Múa và Hát, 1 người tham gia cả 2 nhóm Múa và Thơ, 5 người tham gia cả hai nhóm Hát và Thơ. Hỏi câu lạc bộ có bao nhiêu thành viên ?

2.6. Trong nhóm 100 khách du lịch có 70 người biết tiếng Anh, 45 người biết tiếng Pháp và 23 người biết cả hai thứ tiếng. Hỏi trong nhóm có bao nhiêu người không biết cả hai thứ tiếng ?

2.7. Với các tập hợp $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^*_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}^*_-$, $\mathbb{R}^*$ trong ví dụ 5, hãy xác định các tập sau :

a) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}^*_+$; b) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_-$; c) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^*_-$; d) $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_+$; e) $\mathbb{R}^*_- \cap \mathbb{R}_+$

2.8. Xác định các tập sau và biểu diễn chúng trên trục số :

a) $[-4 ; 2) \cup (0 ; 3]$; b) $(-2 ; 4) \cap [1 ; 5)$; c) $(-\infty ; 0) \cup (-4 ; 5]$

d) $[2 ; +\infty) \cap (-\infty ; 5)$; e) $\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 7]$; g) $(-3 ; 0) \setminus (-1 ; 4)$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

2.1. a) $A = \{-6, -1, 1, -11\}$;   b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $C = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$;   d) $D = \left\{-2, \dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{55}, \dfrac{5}{116}\right\}$;

2.2. a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6 \right\}$; b) $B = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 7 \right\}$

2.3. a) $E \subset C \subset B \subset A$; $E \subset D \subset B \subset A$.

b) $C_A B$ = "Phần bù của tập hợp các hình bình hành trong tập hợp các tứ giác" . Đó là "Tập hợp các tứ giác không phải hình bình hành".

$C_B D$ = "Phần bù của tập hợp các hình thoi trong tập các hình bình hành" . Đó là "Tập hợp các hình bình hành không phải là hình thoi".

$C \cap D$ = "Giao của tập hợp các hình chữ nhật với tập hợp các hình thoi". Đó là "Tập hợp các hình vuông". Tức là $C \cap D = E$.

$C_B(C \cup D)$ = "Phần bù của hợp của tập các hình chữ nhật và tập các hình thoi trong tập các hình bình hành" . Đó là "Tập hợp các hình bình hành không phải là hình chữ nhật và hình thoi".

2.4. a) $A \cup B \cup C = \{-1, 0, 2, 4, 6, 7, -3, 8, 9\}$

$A \cap C = \varnothing$;

$B \cap C = \{8\}$;

$A \cap B = \{2, 6\}$;

$B \setminus C = \{-3, 2, 6\}$; $C \setminus B = \{1, 9\}$

b) Các tập con của C là : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 9\}$, $\{8, 9\}$, $\{1, 8, 9\}$. Tất cả có 8 tập con.

2.5. Gọi A = {những người tham gia nhóm Hát} ; B = {những người tham gia nhóm Múa} ; C = {những người tham gia nhóm Thơ} ; D = {những thành viên của câu lạc bộ}. Ta có : $D = A \cup B \cup C$. Vậy để tính số phần tử của D (số thành viên của câu lạc bộ) ta đếm số phần tử của A, của B và của C. Nhưng khi đó số các phần tử của $A \cap B$ (những người tham gia vừa nhóm Hát vừa nhóm Múa (10 người) ta đã đếm hai lần), tương tự đối với $A \cap C$ và $B \cap C$. Vậy số thành viên của câu lạc bộ là : $50 + 30 + 20 - 10 - 1 - 5 = 84$ (người).

2.6. Gọi A = {những người biết tiếng Anh} (có 70 người) ; B = {những người biết tiếng Pháp} (có 45 người). Do đó số những người biết tiếng Anh hoặc tiếng Pháp là số những phần tử của $A \cup B$, bằng $70 + 45 - 23 = 92$ (người). Vậy số người không biết cả hai thứ tiếng này là $100 - 92 = 8$ (người).

2.7. a) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+^* = \{0\}$; b) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$; c) $C_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-$;

d) $\mathbb{R}_+^*$; e) $\varnothing$

2.8. a) $[-4 ; 2) \cup (0 ; 3] = [-4 ; 3]$; b) $(-2 ; 4) \cap [1 ; 5) = [1 ; 4)$;

c) $(-\infty ; 0) \cup (-4 ; 5] = [-\infty ; 5]$ d) $[2 ; +\infty) \cap (-\infty ; 5) = [2 ; 5)$;

e) $R \setminus (-\infty ; 7] = [7 ; +\infty)$; g) $(-3 ; 0) \setminus (-1 ; 4) = (-3 ; -1)$

2.9. a) $A \cap B = (1 ; 3]$

$A \cup B = [0 ; 5)$

$A \cap C = \{0\}$

$B \cap C = \varnothing$

$(A \cap B) \cap C = (1 ; 3] \cap \}(-2 ; 0) = \varnothing$

$(A \cup B) \cap C = [0 ; 5] \cap \}(-2 ; 0) = \varnothing$.

b) $A \cap B = \{1\}$

$A \cup B = R$

$A \cap C = C = (0 ; 1)$

$B \cap C = \varnothing$ (Học sinh tự biểu diễn trên trục số)

§3. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nếu a là số gần đúng của $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.

2. Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq h$ thì $-h \leq \bar{a} - a \leq h$ hay $a - h \leq \bar{a} \leq a + h$, như vậy $\bar{a} \in [a - h ; a + h]$. Ta nói h là một *cận trên* của sai số tuyệt đối của $\bar{a}$, và a là số gần đúng của $\bar{a}$ với *độ chính xác* h. Ta viết $\bar{a} = a \pm h$.

3. Gọi tỉ số $\delta(a) = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ là *sai số tương đối* của số gần đúng a. Thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

4. Chữ số k của số gần đúng a được gọi là *chữ số đáng tin* (hay *chữ số chắc*) nếu sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số k đó.

Tất cả các chữ số ở bên trái chữ số đáng tin đều là các chữ số đáng tin.

5. *Cách viết chuẩn số gần đúng* dưới dạng số thập phân là cách viết trong đó mọi chữ số đều là chữ số chắc. Nếu ngoài các chữ số chắc còn những chữ số khác thì phải quy tròn đến hàng thấp nhất có chữ số chắc.

Ví dụ 1. Biết số gần đúng a = 52347423 có độ chính xác h = 210. Hãy

a) Viết các chữ số đáng tin của a ;

b) Viết a dưới dạng chuẩn

c) Ước lượng sai số tương đối của a.

Giải: a) Do ở đây sai số tuyệt đối đến hàng trăm, nên các số từ hàng nghìn tr lên là đáng tin. Vậy các chữ số đáng tin ở đây là : 5, 2, 3, 4, 7.

b) Cách viết a dưới dạng chuẩn là : $a = 52347.10^3$

c) Sai số tương đối của a thoả mãn :

$$\delta(a) \leq \frac{210}{52347423} = 0{,}000004 = 0{,}0004\%$$

Ví dụ 2. Kết quả phép đo chiều dài một quãng đường có độ chính xác là 0,32m với dụng cụ đo bảo đảm sai số tương đối không vượt quá 0,2%. Tính độ dài gần đúng của quãng đường đó.

Giải: Theo công thức $\delta(a) = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow a \approx \dfrac{\Delta_a}{\delta(a)} = \dfrac{0,32}{0,2\%} = 1600(\text{m})$

Ví dụ 3. Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số tìm giá trị $\sqrt[4]{7}$. Làm tròn kết quả nhận được đến chữ số thập phân thứ tư và ước lượng sai số mắc phải

Giải: Dùng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt[4]{7} = 1,62657656169$. Làm tròn đến số thập phân thứ tư ta được $\sqrt[4]{7} = 1,6266$ với $\Delta a \leq 0,0001$ vì $1,6265 < \sqrt[4]{7} < 1,6266$

II. BÀI TẬP

3.1. Viết số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 462632$ với $\Delta a \leq 312$.

b) $a = 324347623,4$ với độ chính xác $h = 1234$.

c) $a = 51,342$ với $\Delta a \leq 0,02$.

3.2. Cho số $e = 2,718281828459045...$

a) Viết gần đúng số e theo nguyên tắc làm tròn với bốn, năm chữ số thập phân và ước lượng sai số mắc phải. Trong mỗi trường hợp đánh giá sai số tương đối.

b) Viết số e dưới dạng chuẩn có 3 chữ số đáng tin, có 10 chữ số đáng tin và ước lượng sai số mắc phải.

3.3. Ước lượng sai số tương đối trong các trường hợp sau :

a) $\Delta_a \leq 24$ và $a = 4234422$; b) $\Delta_a \leq 24$ và $a = -4234$

c) $\Delta_a \leq 0,01$ và $\bar{a} = 3,14$; d) $\Delta_a = 0,1$ và $a = -4,6$

3.4. Tính sai số tuyệt đối của các số gần đúng với

a) $\delta(a) = 3\%$ và $a = -542$; b) $\delta(a) = 0,1\%$ và $a = 1425$

c) $\delta(a) = 1\%$ và $a = 627$; d) $\delta(a) = 0,2\%$ và $a = -428$

3.5. Khi đo chiều dài của một đoạn đường ta được $s = 2457 \pm 0,5$ (m). Xác định các chữ số đáng tin của s và viết s dưới dạng chuẩn.

3.6. Theo số liệu thống kê dân số Đồng bằng sông Cửu Long năm 2004 là 17076123 người với chữ số từ hàng trăm trở lên là đáng tin. a) Hãy viết số đó dưới dạng chuẩn.

b) Ước lượng sai số tương đối và sai số tuyệt đối của số gần đúng đó.

$(A \cap B) \cap C = \varnothing$

$(A \cup B) \cap C = C$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

3.1. a) $a = 462.10^3$; b) $a = 32435.10^4$; c) $a = 51,3$

3.2. a) $e = 2,71823$ với $\Delta_e \leq 0,0001$; $\delta(e) = \dfrac{\Delta_e}{e} \leq \dfrac{0,0001}{2,7183} \leq 0,005\%$

$e = 2,71828$ với $\Delta_e \leq 0,00001$ và $\delta(e) \leq 0,0004\%$

b) $e = 2,72$ với $\Delta_e \leq 0,01$ và $\delta(e) \leq 0,37\%$

$e = 2,718281828$ với $\Delta_e \leq 0,000000001 = 10^{-9}$ và $\delta(e) \leq 0,37.10^{-7}\%$

3.3. a) $0,0006\% \geq \delta(a)$; b) $\delta(a) \leq 0,57\%$;

c) $\delta(a) \leq 0,32\%$; d) $\delta(a) \leq 2,2\%$

3.4. Theo công thức $\delta(a) = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a|.\delta(a)$. Vậy ta có :

a) $\Delta_a = 16,26$; b) 1,425 ; c) 6,27 ; d) 0,856

3.5. Các số đáng tin là : 2, 4, 5, 7. Dạng chuẩn s = 2457.

3.6. a) 17076100 người ; b) $\Delta_a \leq 100$ $\delta(a) \leq 0,0006\%$

§4. CÁC HỆ ĐẾM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tuy không nằm trong chương trình bắt buộc, song các học sinh từ khá trở lê nên biết do tính thực tiễn của các hệ đếm. Hệ đếm ta sử dụng hiện nay là hệ thậ phân, song trong thực tế còn sử dụng một số hệ đếm khác, nhất là hệ nhị phân hệ bát phân và hệ 16 phân.

1. Mỗi số tự nhiên $a \neq 0$, với một số nguyên $g > 1$ tuỳ ý, đều viết được một các duy nhất dưới dạng :

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0,$$

trong đó $0 \leq a_i \leq g-1$, $a_n \neq 0$.

Khi a có biểu diễn như vậy, ta viết $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g$ và nói đó là cách ghi số trong hệ g – phân. Trong hệ thập phân (g = 10) ta không cần viết số 10 ở dưới.

2. Để biểu diễn số tự nhiên trong hệ g – phân ta cần dùng g chữ số. Để biểu diễ số tự nhiên a trong hệ g – phân, ta thực hiện phép chia liên tiếp a và các thươn nhận được cho g.

3. Để đổi số tự nhiên trong hệ g – phân sang hệ h – phân, ta đổi số đó sang h thập phân và đổi từ hệ thập phân sang hệ h – phân.

4. Việc thực hiện các phép tính trong hệ g – phân cũng tương tự như trong h thập phân (đặc biệt trong hệ nhị phân sẽ dễ dàng hơn nhiều).

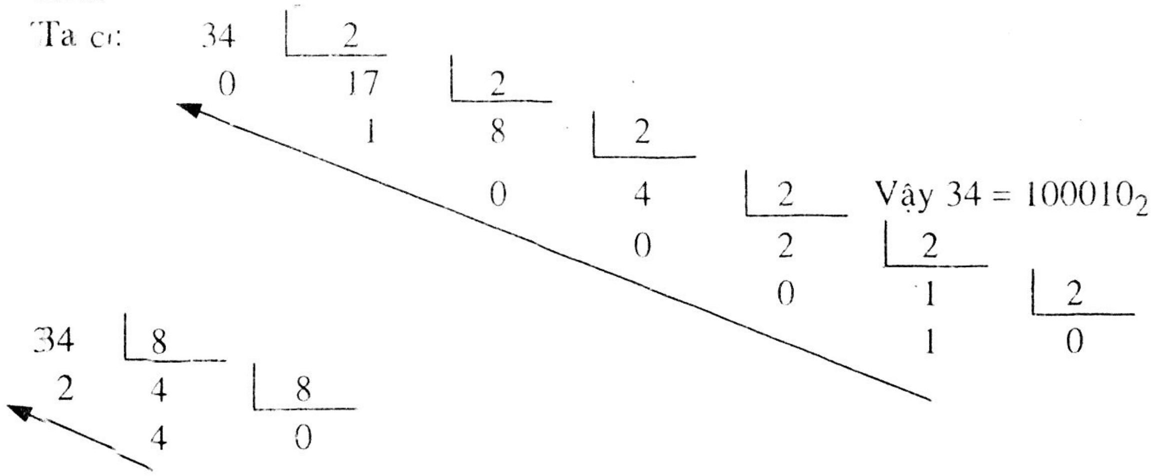
Để cộng hai số bất kì trong hệ g – phân, ta đặt phép tính như trong hệ thập phân cộng các cột từ phải sang trái và nếu có tổng lớn hơn hoặc bằng g thì phải nh sang cột trái kề bên 1 đơn vị.

Để nhân hai số trong hệ nhị phân ta chỉ cần thực hiện các phép dịch chuyển v phép cộng (vì ta có bảng nhân : $0 \times 0 = 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$; $1 \times 1 = 1$)

Ví dụ 1. Biểu diễn số 34 trong hệ nhị phân và trong hệ bát phân.

Giải

Ta có:



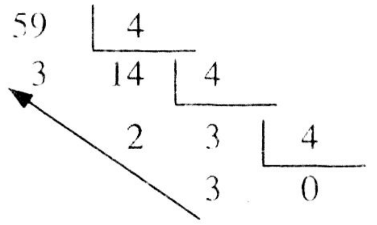
Vậy $34 = 100010_2$

Vậy $4 = 42_8$.

Ví dụ 2. Đổi số 111011_2 sang hệ tứ phân

Giải. Đổi sang hệ thập phân ta có : $111011_2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2 + 2^0 = 59$.

Đổi 59 sang hệ tứ phân ta có :



tức là $59 = 323_4$

Vậy $11011_2 = 323_4$.

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính sau trong hệ nhị phân và kiểm tra lại trong hệ thập phân.

a) 11101 + 1111 ;   b) 11110 × 110

Giải

$$\text{a)}\quad \begin{array}{r} 11101 \\ +\quad 1111 \\ \hline 101100 \end{array}$$

Kiểm tra lại trong hệ thập phân ta có :

$$29 + 15 = 44 \text{ và } 101100_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 = 44.$$

Vậy kết quả của phép cộng là đúng.

$$\begin{array}{r} 11110 \\ \times\quad 110 \\ \hline 00000 \\ 11110 \\ 11110 \\ \hline 10110100 \end{array}$$

Kiểm tra lại trong hệ thập phân ta có :

$$30 \times 6 = 180$$

Đổi kết quả sang hệ thập phân ta được

$$2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 = 128 + 32 + 16 + 4 = 180$$

Vậy kết quả phép nhân là đúng.

II. BÀI TẬP

4.1. Biểu diễn số 39 trong hệ tam phân và ngũ phân

4.2. Biểu diễn số 323 trong hệ 12– phân

4.3. Đổi số 111101_2 sang hệ tam phân và thất phân (7–phân)

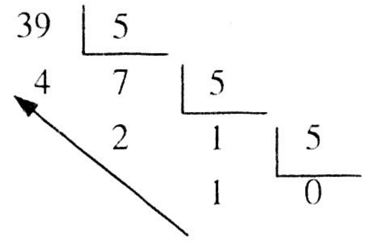
4.4. Thực hiện các phép tính sau và kiểm tra kết quả trong hệ thập phân

a) $1010101_2 + 111011_2$; b) $111111_2 \times 111_2$

c) $23102_4 + 32010_4$; d) $342_5 + 31023_4$

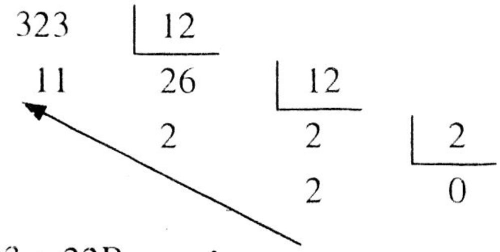
III. HƯỚNG DẪN GIẢI

4.1. Ta có


39
5
4
7
5
2
1
5
1
0

Vậy $39 = 124_5$

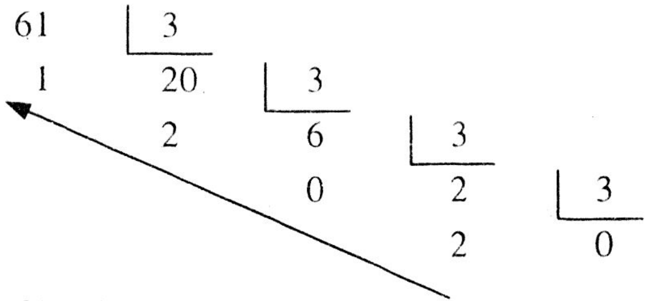
4.2. Để biểu diễn trong hệ 12–phân ta phải dùng 12 chữ số, ta đã có 10 chữ số từ 0 đến 9, ta quy định chữ số A = 10 và chữ số B = 11. Ta có :


323
12
11
26
12
2
2
2
2
0

Vậy $323 = 22B_{12}$.

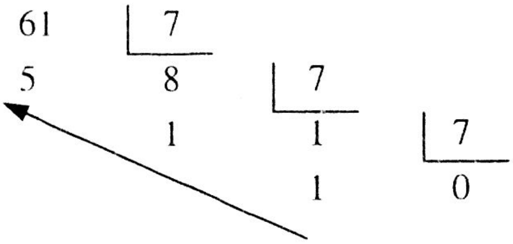
4.3. Trước hết ta có : $111101_2 = 61$

Đổi sang hệ tam phân ta có :


61
3
1
20
3
2
6
3
0
2
3
2
0

Vậy $61 = 2021_3$.

Đổi sang hệ thất phân


61
7
5
8
7
1
1
7
1
0

Vậy $61 = 115_7$.

Như vậy : $111101_2 = 2021_3 = 115_7$

4.4. a)

$$\begin{array}{r} 1010101 \\ +\quad 111011 \\ \hline 10010000 \end{array}$$

Ở hệ thập phân ta có 85 + 59 = 144

b)

$$\begin{array}{r} 111111 \\ \times\quad 111 \\ \hline 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ \hline 110111001 \end{array}$$

Ở hệ thập phân ta có 63.7 = 441

c) Thực hiện trong hệ tứ phân ta có :

$$\begin{array}{r} 23102 \\ +\quad 32010 \\ \hline 121112 \end{array}$$

Kiểm tra lại trong hệ thập phân ta có :

722 + 900 = 1622.

Ngoài ra $121112_4 = 1622$. Vậy kết quả là đúng.

d) Hai số hạng cho trong hai hệ đếm khác nhau. Để thực hiện được phép cộng ta chuyển về cùng một hệ đếm (chẳng hạn về hệ thập phân), rồi thực hiện phép cộng. Ta có

$$342_5 = 3.5^2 + 4.5 + 2.5^0 = 75 + 20 + 2 = 97$$

$$21023_4 = 2.4^4 + 1.4^3 + 0.4^2 + 2.4 + 3 = 587$$

Vậy $342_5 + 21023_4 = 97 + 587 = 684$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 1

1. Hãy phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét đúng sai của các phủ định này

a) $x = -2$ là nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6 = 0$

b) Hình bình hành không phải là hình tứ giác.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 3x - 5 + 2y = y$.

d) $\exists x \in (0 ; 5) : (x - 6)(x^2 + 4x - 5) = 0$

e) $3 - \sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

2. Lập các mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của mệnh đề đó, xét tính đúng sai của chúng trong các trường hợp sau.

a) P = "Tứ giác là hình thoi", Q = "Tứ giác là hình bình hành"

b) P = "Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt" ; Q = "Phương trình bậc hai có biệt thức dương".

3. Cho tập hợp A = {a, b, c, d}

a) Hãy tìm tất cả các tập con của A. Chúng có bao nhiêu ?

b) Hãy tìm C_AB, trong đó B = {b, c}

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1606

4. Xác định các tập số sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $\mathbb{R}_+ \setminus [-1 ; 7]$; b) $(-8 ; 10) \cap [7 ; 12] \cap [-4 ; 8]$

c) $(-2 ; 10) \cup (4 ; 11) \cup (13 ; 14)$; d) $(-1 ; 3) \cup [4 ; +\infty)$

5. Cho số gần đúng a = 43,0416382 với độ chính xác 1,5

a) Xác định các chữ số chắc của a.

b) Viết a dưới dạng chuẩn.

c) Ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối

6. Khi đo một ngôi nhà cao tầng ta được số gần đúng $a = 342,53 \pm 0,12$ (m). H ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối của a.

7. Đổi 47_8 sang hệ nhị phân

8. Thực hiện các phép tính sau ở hệ nhị phân và kiểm tra lại ở hệ thập phân.

a) 1111111 + 11011 ; b) 10111 × 1101.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $x = -2$ không phải là nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6 =$ Mệnh đề này đúng.

b) Hình bình hành là hình tứ giác. Mệnh đề đúng.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 3x - 5 + 2y \neq y$. Mệnh đề đúng.

d) $\forall x \in (0 ; 5) : (x - 6)(x^2 + 4x - 5) \neq 0$. Mệnh đề sai.

e) $3 - \sqrt{2}$ là số vô tỉ. Mệnh đề đúng.

2. a) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu tứ giác là hình thoi thì nó là hình bình hành". Mệnh đề đú

$Q \Rightarrow P$ "Nếu tứ giác là hình bình hành thì nó là hình thoi". Mệnh đề sai.

b) $P \Rightarrow Q$ = "Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thì nó có b thức dương". Mệnh đề này đúng.

$Q \Rightarrow P$ = "Nếu phương trình bậc hai có biệt thức dương thì nó có hai nghi phân biệt ". Mệnh đề đúng.

3. a) Có 16 tập con (tự liệt kê) ; b) $C_A B, = \{a, d\}$

4. a) $\mathbb{R}_+ \setminus [-1 ; 7] = [7 ; +\infty)$; b) $(-8 ; 10) \cap [7 ; 12] \cap [-4 ; 8] = [7 ; 8)$

c) $(-2 ; 10) \cup (4 ; 11) \cup (13 ; 14) = (-2 ; 11) \cup (13 ; 14)$;

d) $(-1 ; 3) \cup [4 ; +\infty)$ (HS tự biểu diễn trên trục số).

5. a) Số a có một chữ số chắc là : 4

b) Dưới dạng chuẩn a = 40 ; c) $\Delta_a \leq 1,5$ và $\delta(a) \leq 3,485\%$.

6. $\Delta_a \leq 0,12$ và $\delta(a) \leq 0,04\%$

7. Đổi $47_8 = 39 = 100111_2$

8. a) Ở hệ đếm nhị phân có kết quả : 10011010. Kiểm tra ở hệ thập phân 127 + 27 = 154 (đúng).

b) Trong hệ nhị phân ta có kết quả 100101011. Kiểm tra ở hệ thập phân : 2 13 = 299 (đúng).

CHƯƠNG II

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Một số kiến thức dưới đây đã được biết ở các lớp dưới, học sinh cần củng cố lại và làm những bài tập có tính nâng cao hơn.

1. Một hàm số có thể được cho bằng bốn cách sau : Bằng bảng, bằng biểu đồ, bằng công thức và bằng đồ thị.

Khi hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (hay tăng) trên khoảng $(a ; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Điều này tương đương với

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \forall x_1, x_1 \in (a;b), x_1 \neq x_2$$

3. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (hay giảm) trên khoảng $(a ; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$ hay

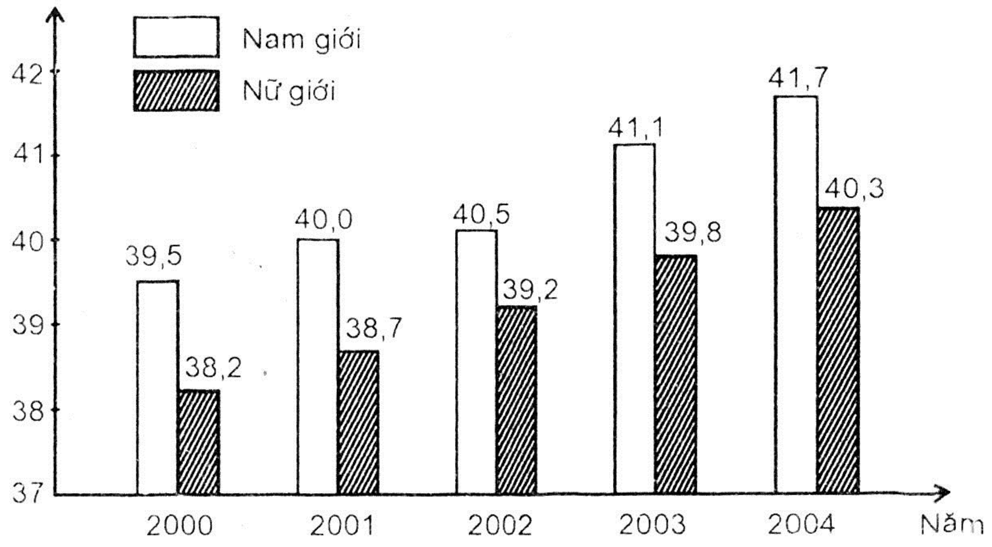
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x_1, x_1 \in (a; b), x_1 \neq x_2$$

4. Kết quả khảo sát chiều biến thiên của một hàm số (tức là xác định các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó) thường được cho trong một bảng gọi là bảng biến thiên, với mũi tên đi xuống chỉ là "giảm" và mũi tên đi lên chỉ là "tăng".

5. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là hàm số chẵn nếu $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng

6. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là hàm số lẻ nếu $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng

Ví dụ 1. Theo niên giám thống kê năm 2004 ta có biểu đồ sau (h.1) biểu thị dân số trung bình phân theo giới tính của nước ta qua 5 năm. Coi $f(x)$ biểu thị số nam, $g(x)$ biểu thị số nữ. Qua biểu đồ



Hình 1

a) Tìm tập xác định của cả hai hàm số f(x), g(x).

b) Tìm các giá trị g(2002), f(2004) và nêu ý nghĩa của chúng.

c) Tính các hiệu f(2003) − f(2000), g(2004) − g(2001) và nêu ý nghĩa của chún

d) Tính g(2002) + f(2002) và nêu ý nghĩa của nó.

Giải: a) Tập xác định của cả hai hàm số f(x), g(x) là

$$D = \{2000, 2001, 2002, 2003, 2004\}$$

b) g(2002) = 39,2. Số nữ giới năm 2002 là 39,2 triệu người

f(2004) = 41,7. Số nam giới năm 2004 là 41,7 triệu người

c) f(2003) − f(2000) = 41,1 − 39,5 = 1,6. Số nam giới năm 2003 nhiều hơ nam giới năm 2000 là 1,6 triệu người

g(2004) − g(2001) = 40,3 − 38,7 = 1,6. Số nữ giới năm 2001 ít hơn số nữ năm 2004 là 1,6 triệu người

d) g(2002) + f(2002) = 39,2 + 40,5 = 79,7. Dân số nước ta năm 2002 là 7 triệu người.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $f(x) = \dfrac{5+2x}{x^2 - 3x - 18}$; b) $f(x) = \sqrt{3-4x}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3}, & x \geq 4 \\ \sqrt{5-x}, & x < 4 \end{cases}$; d) $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+2} + \sqrt{2-x}$

Giải: Các hàm số đều cho bởi công thức, nên theo quy ước ta có :

a) Vì trong biểu thức của f(x) phải thực hiện phép chia, nên hàm số xác đ với mọi x thoả mãn $x^2 - 3x - 18 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ và $x \neq 6$ (Vì $x^2 - 3x - 18$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 6\}$.

b) Để thực hiện được phép căn bậc hai phải có $3 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty ; \frac{3}{4}\right]$

c) Hàm số được cho bởi hai công thức trong những khoảng khác nhau, ta hãy xét từng khoảng một. Hàm số xác định với mọi $x \geq 4$ vì $3 \notin [4 ; +\infty)$. Mặt khác, với mọi $x < 4$, biểu thức $\sqrt{5-x}$ đều có nghĩa (do $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ mà $4 < 5$). Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số đã cho f(x) được xác định với mọi x thoả mãn

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Do $-2 \in (-\infty ; 2]$, nên tập xác định của hàm số là $D = (-\infty ; 2] \setminus \{-2\}$

Ví dụ 3. Trên các khoảng đã chỉ ra, xét tính đồng biến và tính nghịch biến của các hàm số sau :

a) $f(x) = -2x + 8$ trên $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$, trên các khoảng $(-5 ; -4)$ và $(1 ; +\infty)$

c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$, trên các khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(0 ; 3)$.

Giải: a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) - f(x_2) = -2x_1 + 8 - (-2x_1 + 8) =$ $= -2(x_1 - x_2) > 0$ (Vì $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$), hay $f(x_1) > f(x_2)$. Vậy, theo định nghĩa hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$ và $x_1, x_2 \neq -2$ ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2-x_1}{x_1+2} - \frac{2-x_2}{x_2+2} = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)}.$$

Từ đó $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)} = -\frac{4}{(x_1+2)(x_2+2)} \qquad (*)$$

Ta thấy $\forall x_1, x_2 \in (-5 ; -4)$ và $x_1 \neq x_2$

$$-\frac{4}{(x_1+2)(x_2+2)} < 0$$

Vì $x_1 + 2 < -4 + 2 < -2 < 0$ và tương tự $x_2 + 2 < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-5 ; -4)$.

Trên khoảng $(1 ; +\infty)$ từ (*) có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_2 - x_1)} = -\frac{4}{(x_1+2)(x_2+2)} < 0$

(vì $x_1 + 2 > 3$ và $x_2 + 2 > 3 > 0$)

Vậy hàm số cũng nghịch biến trên $(1 ; +\infty)$.

c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1^2 + 4x_1 - 1 - (2x_2^2 + 4x_2 - 1)}{x_1 - x_2} = 2(x_1 + x_2) + 4$$

Trên khoảng $(-\infty ; -2)$ có : $2(x_1 + x_2) + 4 < 2(-2 - 2) + 4 = -4 < 0$ hay

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 .$$

Vậy hàm số nghịch biến.

Trên khoảng $(0 ; 3)$ ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = 2(x_1 + x_2) + 4 > 4 > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0 ; 3)$.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = 2x^3 + 5x$; b) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x + 2}$; c) $f(x) = x^2 - x$.

Giải: a) Tập xác định của hàm số f(x) là $D = \mathbb{R}$, nên nếu $x \in D$ thì $-x \in$
Mặt khác $f(-x) = 2.(-x)^3 + 5(-x) = -2x^3 - 5x = -(2x^3 + 5x) = -f(x)$. Vậy h
số đã cho là lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, nên rõ ràng $2 \in D$, nhưng $-2 \notin$
Hàm số không chẵn cũng không lẻ.

c) Dễ thấy, $D = \mathbb{R}$, nên nếu $x \in D$ thì $-x \in D$. Ngoài ra, $f(-x) = (-x)^2 - (-$
$= x^2 + x$. Từ đó, $f(-x) \neq f(x)$ và $f(-x) \neq -f(x)$, do đó hàm số đã cho kh
chẵn cũng không lẻ.

II. BÀI TẬP

1.1. Theo Niên giám Thống kê 2004 ta có bảng sau đây về sản lượng thuỷ sản nước ta được chia ra theo khai thác và nuôi trồng qua 10 năm từ 1995 đến 20

Đơn vị tính : nghìn tấn

Năm	Khai thác	Nuôi trồng
1995	1195,3	389,1
1996	1278,0	423,0
1997	1315,8	414,6
1998	1357,0	425,0
1999	1526,0	480,8
2000	1660,9	589,6
2001	1724,8	709,9
2002	1802,6	844,8
2003	1856,1	1003,1
2004	1922,9	1155,6

Gọi f(x) và g(x) là các hàm số tương ứng biểu thị sản lượng thuỷ sản khai thác và nuôi trồng của năm x.

a) Hãy tìm tập xác định của các hàm số này.

b) Tìm các giá trị f(1997), f(2001), g(2003) và nêu ý nghĩa của chúng.

c) Tìm các hiệu f(2002) −f(1995) ; g(1996) − g(1995) và nêu ý nghĩa của chúng.

d) Tìm các tổng f(1998) + g(1998) ; f(2004) + g(2004) và nêu ý nghĩa của chúng.

1.2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a) $f(x) = -x^4 + 3x - 2$; b) $f(x) = \dfrac{3x-4}{(3-2x)(x+5)}$; c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+7}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 6x + 5}$; e) $f(x) = \sqrt{2x+7} - \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$

1.3. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+1}{x+2} & \text{với } x > 0 \\ 3x - x^2 & \text{với } x \le 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} \sqrt{5x-3} & \text{với } x \ge 1 \\ \sqrt{4-x} & \text{với } x < 1 \end{cases}$

$$h(x) = 5x^2 + 2x - 1 \text{ ; } u(x) = -x^2 + 1 - \sqrt{2x-1}$$

Hãy tính các giá trị sau :

$f(0)$, $f(3)$; $f(-1)$; $g(0)$; $g(4)$; $g(-5)$; $h(3)$; $h(0)$; $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $u\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $u\left(\dfrac{5}{2}\right)$

1.4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng được chỉ ra :

a) $f(x) = 7x + 10$ trên $\mathbb{R}$; b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ trên $(-4 ; 7)$ và $(-10 ; -5)$

c) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ trên $(0 ; 2)$ và $(4 ; 7)$

1.5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = -\sqrt{5}$; b) $f(x) = \sqrt{3x-9}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x}$

d) $f(x) = x^3 - 5x$; e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. a) Tập xác định của cả hai hàm số là

D = {1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004}

b) f(1997) = 1315,8; tức là năm 1997 sản lượng khai thác thuỷ sản của nước ta là 1315,8 nghìn tấn.

f(2001) = 1724,8 – sản lượng khai thác thuỷ sản năm 2001 là 1724,8 nghìn tấn.

g(2003) = 1003,1 – sản lượng nuôi trồng thuỷ sản năm 2003 là 1003,1 nghìn tấn.

c) f(2002) − f(1995) = 1802,6 − 1195,3 = 607,3 – sản lượng khai thác thuỷ sản năm 2002 nhiều hơn so với năm 1995 là 607,3 nghìn tấn.

$g(1996) - g(1995) = 423{,}0 - 389{,}1 = 33{,}9$ – sản lượng nuôi trồng thuỷ s
năm 1996 nhiều hơn so với năm 1995 là 33,9 nghìn tấn.

$f(1998) + g(1998) = 1357{,}0 + 425{,}0 = 1782{,}0$ – tổng sản lượng thuỷ sản nă
1998 của nước ta là 1782,0 nghìn tấn.

$f(2004) + g(2004) = 1922{,}9 + 1155{,}6 = 3078{,}5$ – tổng sản lượng thuỷ sản nă
2004 của nước ta là 3078,5 nghìn tấn.

1.2. a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}, -5\right\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$;

d) Hàm số xác định với mọi x thoả mãn : $x - 2 \geq 0$ và $x^2 - 6x + 5 \neq 0$, tức là
≥ 2 và $x \neq 1$ và $x \neq 5$; hay $x \in (2 ; +\infty)\setminus\{5\}$; e) $[1 ; 6]$

1.3. $f(0) = 3.0 - 0^2 = 0$; $f(3) = \frac{6.3+1}{3+2} = \frac{19}{5}$; $f(-1) = 3.(-1) - (-1)^2 = -4$;

$g(0) = \sqrt{4 - 0} = 2$; $g(4) = \sqrt{5.4 - 3} = \sqrt{17}$; $g(-5) = \sqrt{4-(-5)} = 3$

$h(3) = 5.3^2 + 2.3 - 1 = 50$; $h(0) = -1$; $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$; $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$$u\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 - \sqrt{2.\frac{5}{2} - 1} = -\frac{25}{4} + 1 - 2 = -7\frac{1}{4}$$

1.4. a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = 7x_1 + 10 - (7x_2 + 10) = 7(x_1 - x_2) < 0,$$

hay $f(x_1) < f(x_2)$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \left(\frac{2x_1 + 3}{x_1 + 4} - \frac{2x_2 + 3}{x_2 + 4}\right).\frac{1}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5x_1 - 5x_2}{(x_1 + 4)(x_2 + 4)}.\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{5}{(x_1 + 4)(x_2 + 4)}$$

- Trên khoảng $(-4 ; 7)$ có $A > 0$ hay hàm số đồng biến (vì $x_1 + 4$, $x_2 + 4$ đ
dương do $x_1, x_2 > -4$).
- Trên khoảng $(-10 ; -5)$ cũng có $A > 0$ hay hàm số cũng đồng biến (vì tr
khoảng này $x_1 + 4 < -5 + 4 < -1 < 0$, tương tự $x_2 + 4 < 0$, suy
$(x_1 + 4)(x_2 + 4) > 0$ như tích của hai số âm.

c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_1^2 + 6x_1 + 2 - (-x_2^2 + 6x_2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[-(x_1 + x_2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 6 - (x_1 + x_2)$$

- Trên (0 ; 2) ta thấy A > 0 vì trên đó

$$x_1 + x_2 < 2 + 2 = 4 \text{ và } 6 - (x_1 + x_2) > 2 > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến

- Trên (4 ; 7) ta thấy A < 0 vì trên đó $6 - (x_1 + x_2) < 6 - (4 + 4) = -2 < 0$. Vậy hàm số nghịch biến.

1.5. a) chẵn ; b) không chẵn không lẻ ($3 \in D$ nhưng $-3 \notin D$) ;

c) Hàm số là một hàm số lẻ ($D = R \setminus \{0\}$ và $f(-x) = -f(x)$)

d) lẻ $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x) = -(x^3 - 5x) = -f(x))$.

e) Không chẵn không lẻ ($-2 \in D$ nhưng $2 \notin D$).

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

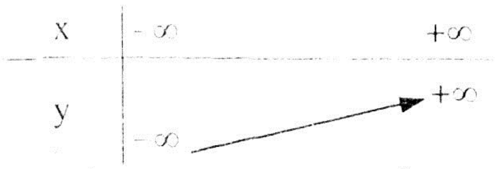
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ta nhắc lại một số vấn đề về hàm số bậc nhất y = ax + b (với a ≠ 0).

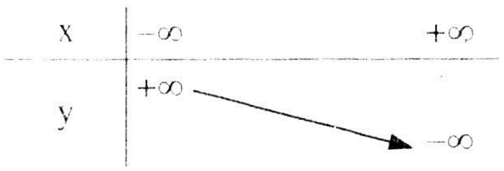
Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Bảng biến thiên

a > 0



a < 0



- Đồ thị là một đường thẳng không song song với các trục toạ độ và có hệ số góc là a, tức là nó song song với đường thẳng y = ax.

- Để vẽ đường thẳng (đồ thị của hàm số y = ax + b) chỉ cần xác định hai điểm khác nhau của nó.

2. Hàm số hằng y = b có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Hàm số hằng là một hàm số chẵn.

Đồ thị của hàm số hằng là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm (0 ; b).

3. Hàm số y = |x| có tập xác định $D = \mathbb{R}$; hàm số đó là một hàm số chẵn. Hàm số nghịch biến trên (−∞ ; 0) và đồng biến trên (0 ; +∞)

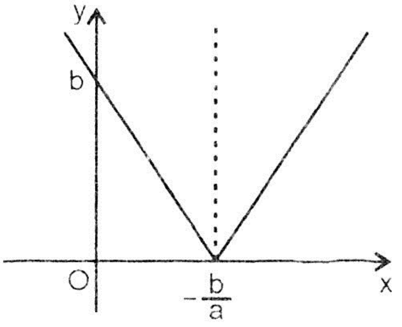
4. Hàm số y = |ax + b| (a ≠ 0) tuy không có trong chương trình, nhưng các học sinh khá giỏi nên biết.

Tập xác định của nó là $D = \mathbb{R}$.

Ta có thể viết: $y = \begin{cases} ax + b & \text{với } x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -ax - b & \text{với } x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Hình 2

Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm (0 ; |b|), cắt trục hoành tại điểm $\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ và được thể hiện trên hình 2.

Ví dụ 1. Biết đường thẳng đi qua hai điểm P(1 ; 2) và Q(−1 ; −1) và có phươn trình dạng y = ax + b, viết phương trình và vẽ đường thẳng đó.

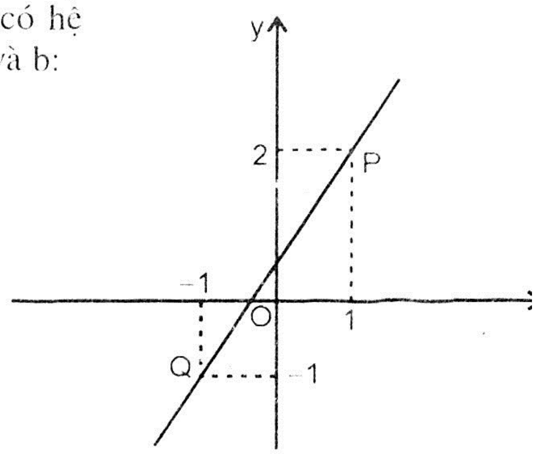
Giải: Vì P(1 ; 2) và Q(−1 ; −1) nằm trên đường thẳng có phương trình y = ax + b nên ta có hệ phương trình sau đối với các ẩn cần tìm a và b:

$$\begin{cases} 2 = a.1 + b \\ -1 = a.(-1) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đường thẳng có phương trình

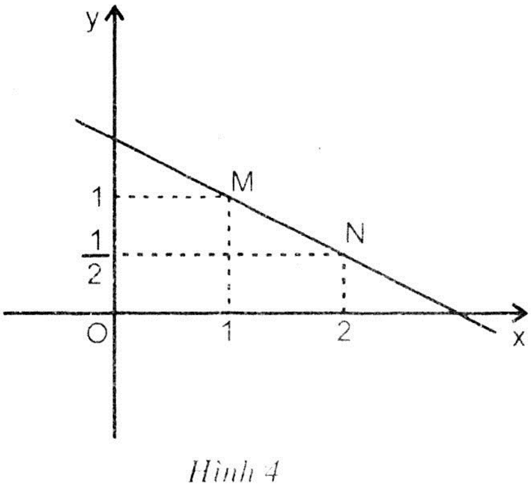
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Đồ thị của đường thẳng trên hình 3.

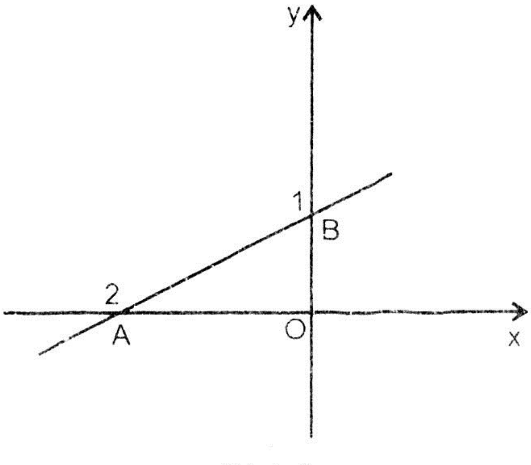


Hình 3

Ví dụ 2. Viết phương trình của đường thẳng y = ax + b được thể hiện trên cá hình sau :



Hình 4



Hình 5

Giải: a) Theo hình 4 đường thẳng đi qua hai điểm M(1 ; 1) và $N\left(2; \frac{1}{2}\right)$

Vì đường thẳng có phương trình dạng y = ax + b, nên có hệ sau

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ \frac{1}{2} = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy, có phương trình $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) Qua hình 5 ta thấy đường thẳng có phương trình cần tìm đi qua hai điểm A(−2, 0) và B(0, 1). Vậy ta có :

$$\begin{cases} 0 = -2a + b \\ 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng là $y = \frac{1}{2}x + 1$

Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

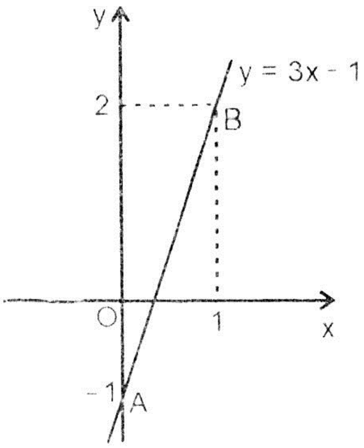
a) $y = 3x - 1$;

b) $y = \begin{cases} -x - 1, & x \in (-\infty; 0) \\ x, & x \in [0, 3] \\ 0,5x + 2, & x \in (3; +\infty) \end{cases}$

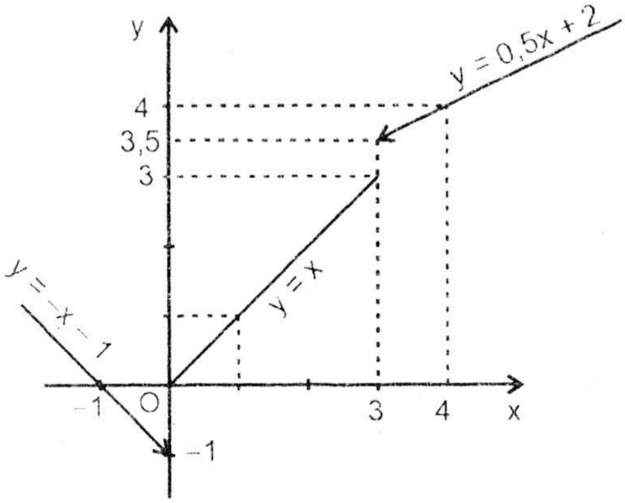
Giải:

a) Khi x = 0 thì y = −1. Vậy điểm A(0 ; −1) nằm trên đồ thị.

Khi x = 1 thì y = 2. Vậy B(1 ; 2) nằm trên đồ thị. Qua A và B kẻ một đường thẳng, đó là đường thẳng cần vẽ. Đồ thị cần vẽ thể hiện ở hình 6.



Hình 6



Hình 7

b) Hàm số cho bởi ba công thức trên những khoảng khác nhau. Ta phải dựng đồ thị của hàm số trên các khoảng (−∞ ; 0), [0 ; 3] và (3 ; +∞) theo các biểu thức tương ứng. Cần lưu ý các điểm (0 ; −1) và (3 ; 3,5) không thuộc đồ thị nên vẽ thêm mũi tên tại các điểm đó, các điểm (0 ; 0) và (3 ; 3) nằm trên đồ thị. Đ thị được thể hiện ở hình 7.

Ví dụ 4. Cho đường thẳng $y = 2x + 1$. Hãy viết phương trình và vẽ các đườn thẳng song song với nó có dạng $y = ax + b$ và đi qua điểm

a) O (0 ; 0) ; b) B (0 ; 2).

Giải: Ở lớp 9 ta đã biết : các đường thẳng song song thì có hệ số góc bằn nhau. Vậy hai đường thẳng cần tìm đều có hệ số góc bằng 2, tức là phươn trình của chúng có dạng $y = 2x + b$. Ta còn phải tìm hệ số b.

a) Vì đường thẳng đi qua điểm O(0, 0), nên ta có phương trình

$$0 = 2.0 + b \Rightarrow b = 0$$

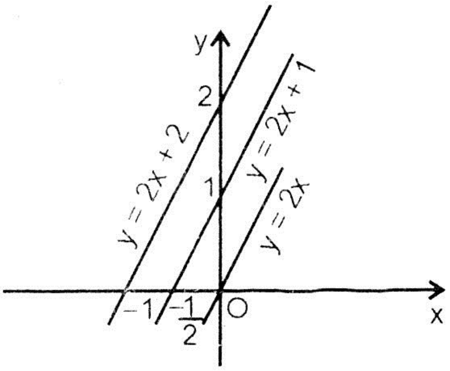
Vậy ta có phương trình $y = 2x$ (h. 8)

b) Đường thẳng cần tìm đi qua điểm B (0 ; 2) nên ta có

$$2 = 0.2 + b \Rightarrow b = 2$$

Vậy đường thẳng có phương trình : $y = 2x + 2$.

Đồ thị được biểu diễn trên hình 8.

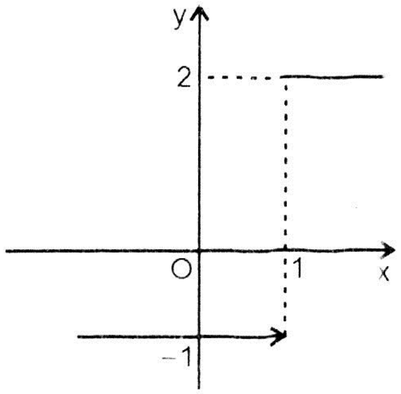


Hình 8

Ví dụ 5. Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \begin{cases} 2, & x \geq 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

Giải. Hàm số được cho bởi hai công thức trên hai khoảng khác nhau. Trên mỗi khoảng hàm số là hàm số hằng và có đồ thị song song với trục hoành. Đồ thị thể hiện ở hình 9. *Chú ý* : điểm (1; −1) không thuộc đồ thị.



Hình 9

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = |2x + 3| + 2x$; b) $y = |x| + |x - 1|$.

Giải. Đây là các hàm số chứa các giá trị tuyệt đối. Để khảo sát và vẽ đồ thị của chúng ta khử các dấu giá trị tuyệt đối dựa vào định nghĩa, viết biểu thức của hàm số trên các khoảng tương ứng. Tập xác định của các hàm số trên là $D = \mathbb{R}$.

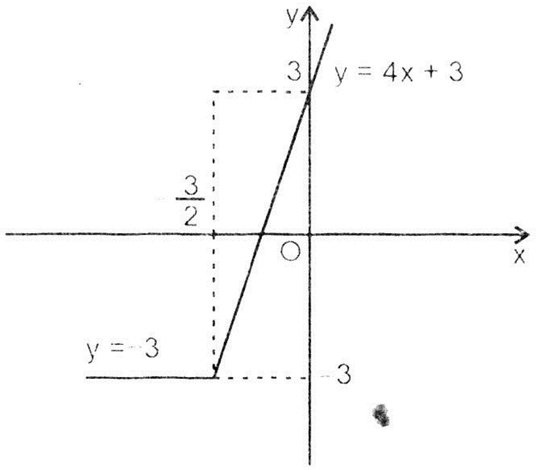
a) Vì $|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{với } x \geq -\dfrac{3}{2} \\ -2x-3, & \text{với } x < -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ nên ta có thể viết:

$$y = \begin{cases} 2x+3+2x, & \text{với } x \geq -\dfrac{3}{2} \\ -2x-3+2x, & \text{với } x < -\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ hoặc } y = \begin{cases} 4x+3, & \text{với } x \geq -\dfrac{3}{2} \\ -3, & \text{với } x < -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y	không đổi		-3	↗	$+\infty$

Đồ thị trên hình 10.



Hình 10

b) Ta có $|x| = \begin{cases} x, & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ và

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{với } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{với } x < 1 \end{cases}$$

Vậy ta phải chia trục số thành ba khoảng : $(-\infty\,;0]$; $(0\,;1]$ và $(1\,;+\infty)$. Từ các công thức trên ta có

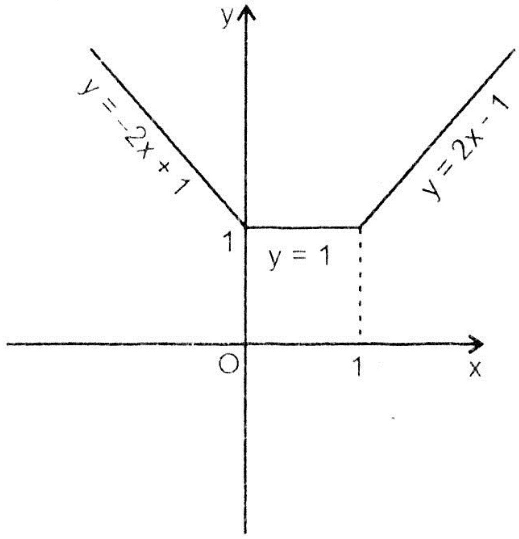
$$y = |x| + |x-1| = \begin{cases} -x-x+1, & x \in (-\infty\,;0) \\ x-x+1, & x \in [0\,;1) \\ x+x-1, & x \in [1\,;+\infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -2x+1, & x \in (-\infty\,;0) \\ 1, & x \in [0\,;1) \\ 2x-1, & x \in [1\,;+\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	không đổi	1	↗	$+\infty$

Đồ thị trên hình 11.



Hình 11

II. BÀI TẬP

2.1. Viết phương trình và vẽ đường thẳng biết nó có dạng $y = ax + b$ và đi qua hai điểm:

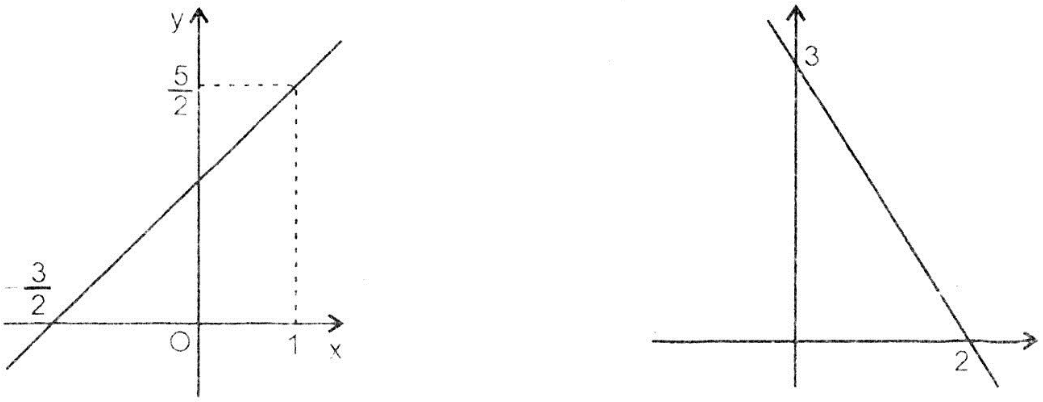
a) $A(1\,;0)$ và $B(2\,;1)$;

b) $M(-1\,;2)$ và $N(0\,;1)$;

c) $P(1\,;\sqrt{2})$ và $Q(\frac{1}{2}\,;\sqrt{2})$;

d) $R(\sqrt{2}\,;1)$ và $S(1\,;0)$.

2.2. Viết phương trình dạng $y = ax + b$ của đường thẳng trên hình vẽ sau :



Hình 12.

2.3. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x - 3$; b) $y = 2 - 2x$; c) $y = -x + 2$;

d) $y = \begin{cases} x + 2, & x \in (-\infty; 0) \\ 2x - 1, & x \in [0; +\infty); \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in (-\infty; -1) \\ x, & x \in [-1; 2] \\ 0{,}5x - 1, & x \in (2; +\infty). \end{cases}$

2.4. Cho đường thẳng $y = -x + 3$. Viết phương trình dạng $y = ax + b$ của các đườn thẳng song song với đường thẳng đã cho và đi qua các điểm

a) $M(0 ; 0)$; b) $N(1 ; \frac{3}{2})$; c) $P(2 ; -2)$

Vẽ các đường thẳng trên trong cùng một hệ toạ độ.

2.5. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau

a) $y = 3x + 5$; b) $y = -\sqrt{3}x$; c) $y = 3x - 1$;

d) $y = -\frac{1}{2}x - 3$; e) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; g) $y = -\sqrt{3}x - 4$.

2.6. Cho hàm số $y = |x - 2| + |2x - 1| + |x + 1|$. Hỏi trong các điểm sau đây điểm nào thuộc đồ thị của hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số :

$A(0 ; 2)$; $B(0 ; 4)$; $C(-1 ; 6)$; $D(-1 ; 3)$; $E(2 ; 6)$.

2.7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \left|-\frac{1}{2}x + 1\right|$; b) $y = |3x - 1|$;

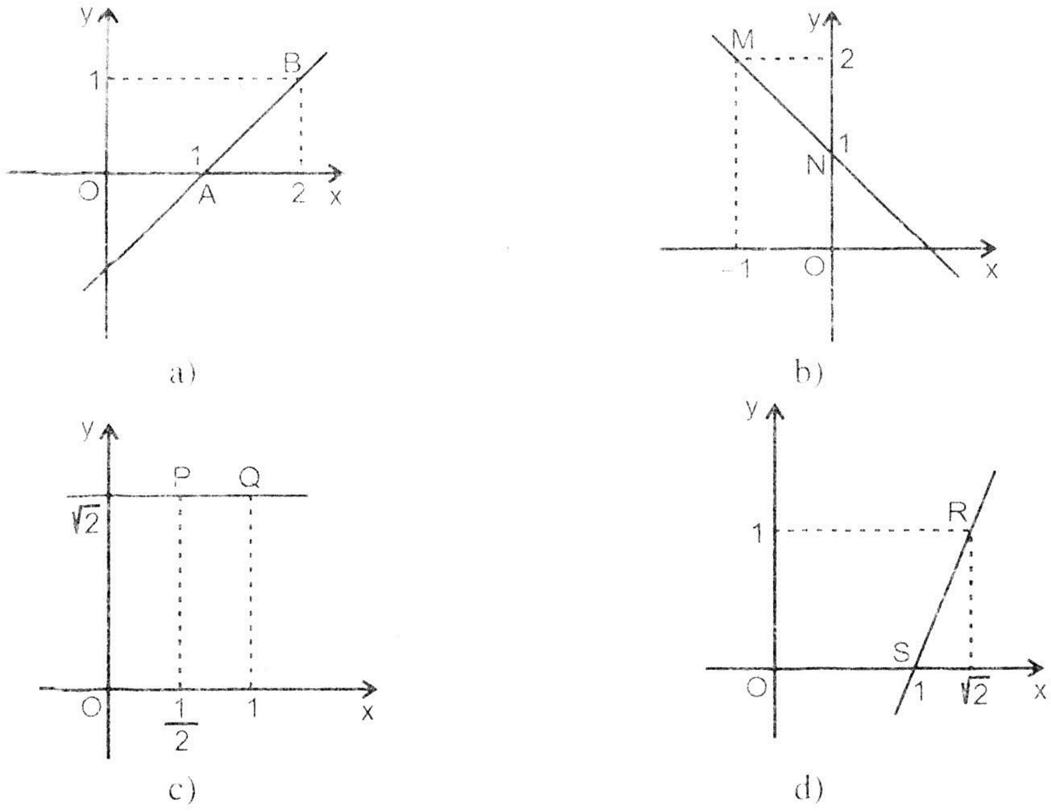
c) $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| - \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$; d) $y = \left|\frac{3}{2}x - 1\right| - \left|\frac{3}{2}x + 1\right| + |x - 2|$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

2.1. Từ điều kiện đường thẳng đi qua hai điểm ta phải xác định các hệ số a và b trong phương trình. Do toạ độ của mỗi điểm phải thoả mãn phương trình, nên ta sẽ có một hệ hai phương trình hai ẩn a và b

a) $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy ta có phương trình $y = x - 1$. Đồ thị trên hình 13a.



a) b) c) d)

Hình 13

b) Vì M và N nằm trên đồ thị, nên ta có hệ $\begin{cases} -a + b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

Vậy có phương trình $y = -x + 1$. Đồ thị trên hình 13b.

c) Các điểm P $(1, \sqrt{2})$ và Q $(\frac{1}{2} ; \sqrt{2})$ nằm trên đồ thị, nên ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = \sqrt{2}.$$

Vậy ta có đường thẳng $y = \sqrt{2}$, đường thẳng song song với trục hoành (h. 13c)

d) Ta có phương trình của đường thẳng là $y = (\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2} - 1$. Đồ thị trên hình 13d.

2.2. Ta phải xác định các hệ số a và b trong công thức $y = ax + b$ dựa trên đồ thị cụ thể trong mỗi trường hợp.

a) Nhìn trên đồ thị ta thấy khi $x = -\frac{3}{2}$ thì $y = 0$ và khi $x = 1$ thì $y = \frac{5}{2}$. Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a + b = 0 \\ a + b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 1 \text{ và } b = \frac{5}{2} - a = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đường thẳng là $y = x + \frac{3}{2}$.

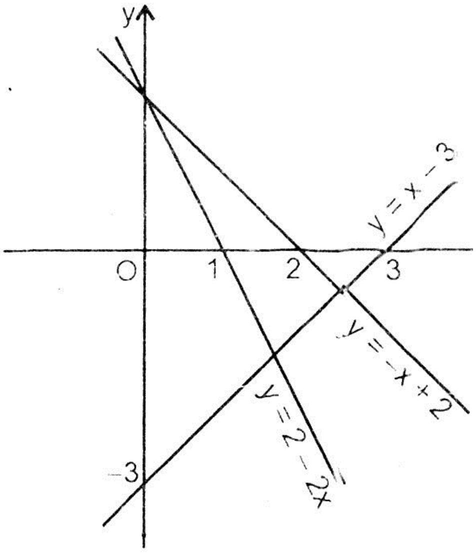
b) Phương trình đường thẳng là $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

c) Đường thẳng đi qua gốc O (0 ; 0) nên có dạng y = ax, dựa trên đồ thị ta th

khi $x = \sqrt{5}$ thì y = 1 vậy $a = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Vậy đường thẳng có phương trình

$y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$.

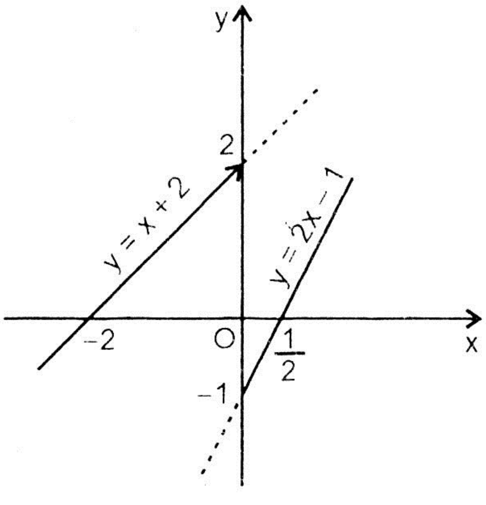
2.3. Ta sẽ vẽ đồ thị của ba hàm số a), b), c) trên cùng một hệ toạ độ. Để vẽ mỗi đường thẳng ta chỉ cần xác định hai điểm trên đường thẳng đó. Đồ thị của chúng được thể hiện trên hình 14.



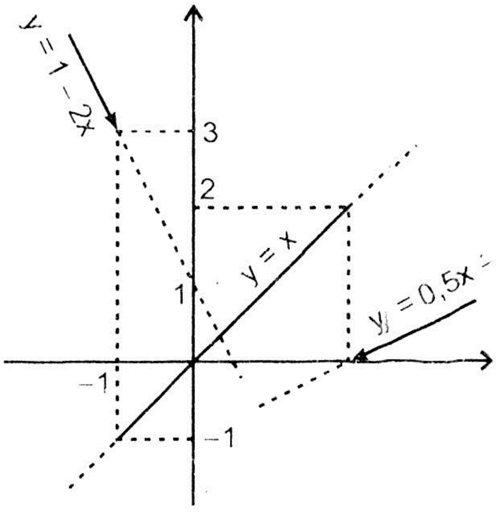
Hình 14

d) Hàm số cho bằng hai công thức ứng với các khoảng khác nhau. Để vẽ đồ t của hàm số ta vẽ đường thẳng y = x + 2 sau đó giữ lại phần đồ thị ứng v khoảng (–∞ ; 0) ; vẽ đường thẳng y = 2x – 1 sau đó giữ lại phần đồ thị ứng v khoảng [0 ; +∞). Lưu ý là điểm (0 ; 2) không thuộc đồ thị, điểm (0 ; –1) thuộ đồ thị (h. 15).

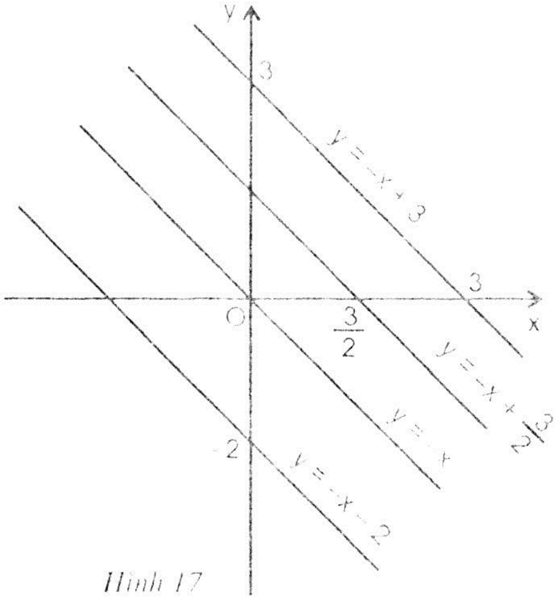
e) Hàm số cho bằng ba biểu thức trên ba khoảng khác nhau. Để vẽ đồ thị c hàm số ta vẽ ba đường thẳng (nét đứt) sau đó giữ các phần đường thẳng ứ với các khoảng tương ứng. Lưu ý các điểm (–1 ; 3) và (2 ; 0) không thuộc đ thị (vẽ mũi tên) còn các điểm (–1 ; –1) và (2 ; 2) thuộc đồ thị (h. 16).



Hình 15



Hình 16



Hình 17

2.4. Vì các đường thẳng song song có chung hệ số góc, nên các phương trình của các đường thẳng cần tìm đều có hệ số góc a = −1, tức là có phương trình $y = -x + b$.

a) Đường thẳng đi qua M (0 ; 0) nên ta có : $0 = -0 + b \Rightarrow b = 0$

Vậy phương trình của nó là $y = -x$ (h. 17).

b) $y = -x + \frac{3}{2}$ (h. 17)

c) $y = -x - 2$ (h. 17).

2.5. Các đường thẳng song song có các hệ số góc bằng nhau nên ta có các cặp đường thẳng sau là song song với nhau:

$y = 3x + 5$ và $y = 3x - 1$; $y = -\sqrt{3}\,x$ và $y = -\sqrt{3}\,x - 4$

$y = -\frac{1}{2}x - 3$ và $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

2.6. Một điểm nằm trên đồ thị của hàm số khi và chỉ khi toạ độ (a ; b) của nó thoả mãn $b = f(a)$.

Khi $x = 0$ ta có $y(0) = |0 - 2| + |2.0 - 1| + |0 + 1| = 4$

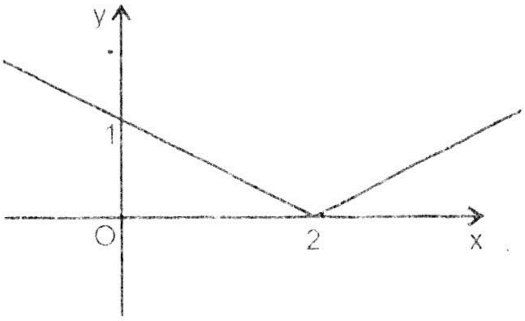
Vậy điểm B (0 ; 4) nằm trên đồ thị, còn A (0 ; 2) không nằm trên đồ thị.

Khi $x = -1$ ta có $y(-1) = |-1 - 2| + |2.(-1) - 1| + |-1 + 1| = 6$

Vậy điểm C (−1 ; 6) thuộc đồ thị, còn D (−1 ; 3) không thuộc đồ thị.

Khi $x = 2$ thì $y(2) = 6$, suy ra E (2 ; 6) thuộc đồ thị.

2.7. Để lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số cho bằng công thức chứa các dấu giá trị tuyệt đối ta khử toàn bộ các dấu giá trị tuyệt đối dựa trên định nghĩa về giá trị tuyệt đối, ta sẽ được hàm số cho bằng hai, ba... công thức trên các khoảng khác nhau.



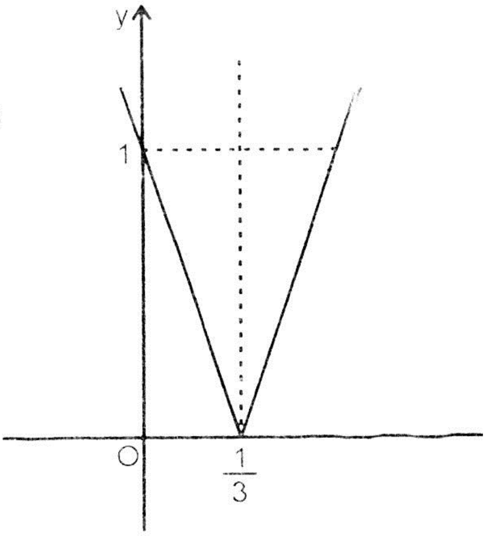
Hình 18

a) $$\left|-\frac{1}{2}x + 1\right| = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1, & x \in (-\infty; 2) \\ \frac{1}{2}x - 1, & x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Đồ thị trên hình 18. Học sinh tự lập bảng biến thiên.

b) $$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \\ -3x + 1, & x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Đồ thị trên hình 19. Học sinh tự lập bảng biến thiên dựa trên đồ thị.



Hình 19

c) Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, ta có

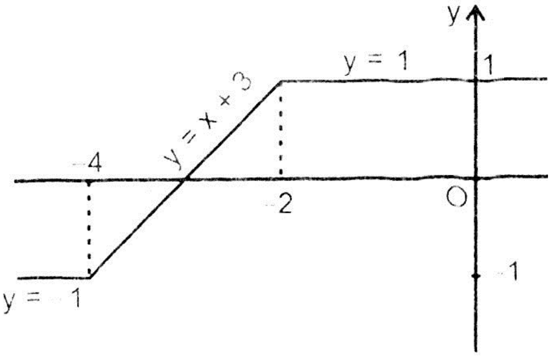
$$\left|\frac{1}{2}x+2\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2,\ x\in[-4;+\infty)\\ -\frac{1}{2}x-2,\ x\in(-\infty;-4)\end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{2}x+1\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1,\ x\in[-2;+\infty)\\ -\frac{1}{2}x-1,\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Phải chia $(-\infty\,;+\infty)$ thành 3 khoảng :

$(-\infty\,;-4)$, $[-4\,;-2)$ và $[-2\,;+\infty)$

$$\text{Vậy }y=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty;-4)\\ x+3, & x\in[-4;-2)\\ 1, & x\in[-2;+\infty)\end{cases}$$



Hình 20

Đồ thị được thể hiện ở hình 20. Bảng biến thiên học sinh tự xây dựng.

d) Do định nghĩa về giá trị tuyệt đối, có:

$$\left|\frac{3}{2}x-1\right|=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1,\ x\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right)\\ -\frac{3}{2}x+1,\ x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

$$\left|\frac{3}{2}x+1\right|=\begin{cases}\frac{3}{2}x+1,\ x\in\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)\\ -\frac{3}{2}x-1,\ x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

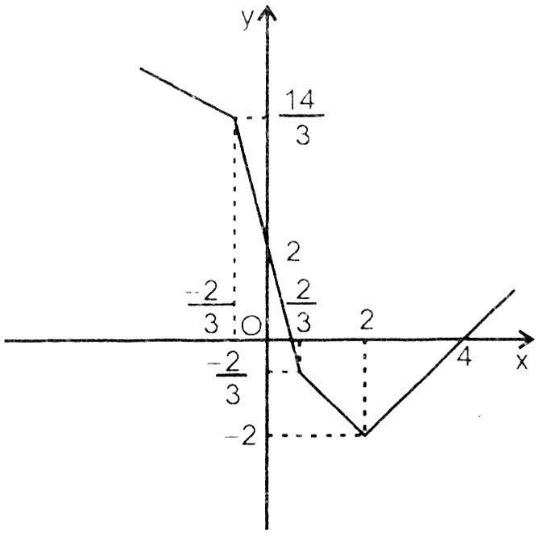
$$|x-2|=\begin{cases}x-2,\ x\in[2;+\infty)\\ -x+2,\ x\in(-\infty;2)\end{cases}$$

Vậy, phải chia trục số thành 4 khoảng $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$, $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$, $\left(\frac{2}{3};2\right)$ và $[2\,;+$

Ta có hàm số với công thức cho trên từng khoảng và bảng biến thiên sau :

$$y = \begin{cases} -x + 4, & x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \\ -4x + 2, & x \in \left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right] \\ -x, & x \in \left(\dfrac{2}{3}; 2\right) \\ x - 4, & x \in [-2; +\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{14}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↘	-2	↗	$+\infty$



Hình 21

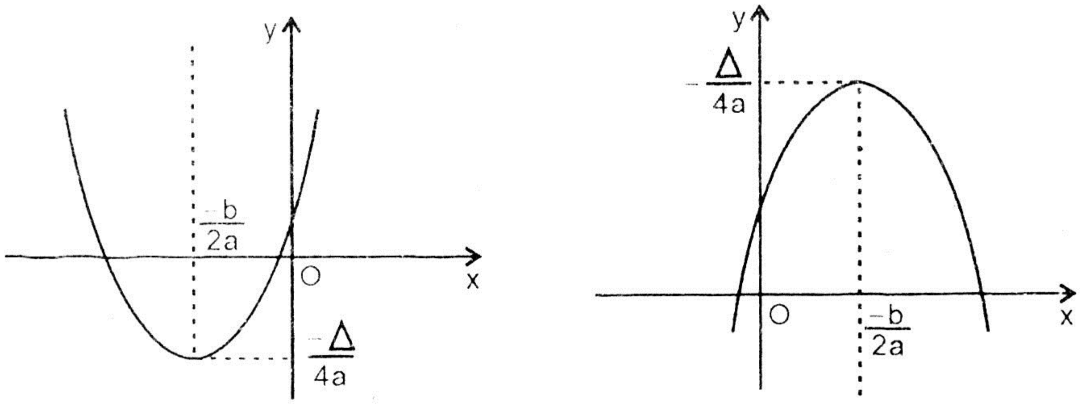
Đồ thị được thể hiện ở hình 21.

§3. HÀM SỐ BẬC 2

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$, có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị là một đường parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên nếu $a > 0$ (h. 22a), xuống dưới nếu $a < 0$ (h. 22b).



a) *Hình 22* *b)*

3. Bảng biến thiên. Từ đồ thị ta có bảng biến thiên sau :

a > 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

a < 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Tức là :

Khi a > 0, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -\frac{b}{2a})$, đồng biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Khi a < 0, hàm số đồng biến trên $(-\infty ; -\frac{b}{2a})$, nghịch biến trên $(-\frac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Để vẽ đường Parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ta làm như sau:

- Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.
- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.
- Xác định giao điểm với trục tung (0 ; c). Xác định giao điểm với trục hoành (nếu có), tức là giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Xác định thêm một số điểm trên đồ thị.
- Vẽ parabol dựa trên kết quả trên.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = x^2 + x - 2$; b) $y = -x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1$.

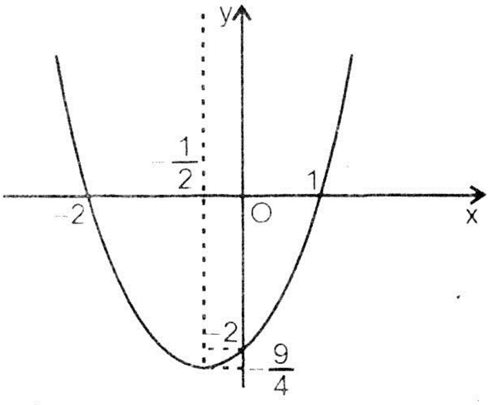
Giải. a) Hàm số bậc hai có a = 1 ; b = 1 và c = −2. Từ đó $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4.1.(-2) = 9$; $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4}$. Vậy, đồ thị của hàm số $y = x^2$ + x − 2 là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$; nhận đường $x = -\frac{1}{2}$ làm trục đối xứn

và bề lõm hướng lên trên. Từ đó suy ra, hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$

đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$



Hình 23

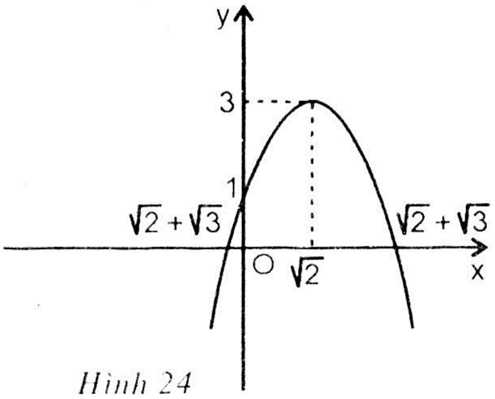
Giao với trục tung tại (0 ; −2). Để tìm giao của đồ thị với trục hoành ta giải phương trình :

$$x^2 + x - 2 = 0 <=> \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Vậy có hai giao điểm với trục hoành là (1 ; 0) và (−2 ; 0). Đồ thị trên hình 23.

b) Hàm số đã cho có tập xác định D = R, a = −1, b = $2\sqrt{2}$; c = 1. Vậy, $-\frac{b}{2a} = \sqrt{2}$; $\Delta = b^2 - 4ac = 8 - 4.(-1)(1) = 12$; $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{4.(-1)} = 3$. Từ đó, đồ thị của hàm số đã cho là một parabol có bề lõm quay xuống dưới, có đỉnh I ($\sqrt{2}$; 3), nhận đường thẳng x = $\sqrt{2}$ làm trục đối xứng. Hàm số đồng biến trên ($-\infty$; $\sqrt{2}$) và nghịch biến trên ($\sqrt{2}$; $+\infty$), có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$



Hình 24

Giao với trục tung tại điểm (0 ; 1). Giao với trục hoành tại hai điểm ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 0) và ($\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 0). Đồ thị của hàm số được thể hiện ở hình 24.

Ví dụ 2. Xác định phương trình của các parabol $y = -2x^2 + bx + c$, biết rằng thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) Có đỉnh là I (1 ; 3)

b) Đi qua hai điểm M (0 ; −2) và N (2 ; 0)

c) Có trục đối xứng là x = 2 và cắt trục hoành tại điểm (2 ; 0).

d) Đi qua điểm P (2 ; −3) và có hoành độ của đỉnh là 3.

Giải. Các parabol là đồ thị của các hàm số bậc hai có chung hệ số a = −2. Vậy trong mỗi trường hợp ta còn phải xác định các hệ số b và c dựa vào các điều kiện cho trước.

a) Vì đỉnh có hoành độ là 1 và tung độ là 3 nên ta có :

$$-\frac{b}{2a} = 1 \text{, tức là } -\frac{b}{2.(-2)} = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 3 \text{, tức là } -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 3 \text{ hay } -\frac{16 - 4(-2).c}{4(-2)} = 3$$

$\Leftrightarrow 16 + 8c = 24 \Rightarrow c = 1$. Vậy, có phương trình $y = -2x^2 + 4x + 1$

b) Vì M, N nằm trên parabol nên toạ độ của chúng phải thoả mãn phương tr
của parabol, tức là :

$-2 = (-2).0^2 + b.0 + c \Rightarrow c = -2$

$0 = (-2).2^2 + b.2 + c \Rightarrow 0 = -8 + 2b - 2 \Rightarrow 2b = -10 \Rightarrow b = -5$.

Vậy phương trình của parabol là $y = -2x^2 - 5x - 2$.

c) Vì trục đối xứng của parabol có phương trình $x = -\dfrac{b}{2a}$, nên ta có

$-\dfrac{b}{2.(-2)} = 2 \Rightarrow b = 8$. Mặt khác, parabol đi qua điểm (2 ; 0) nên ta có

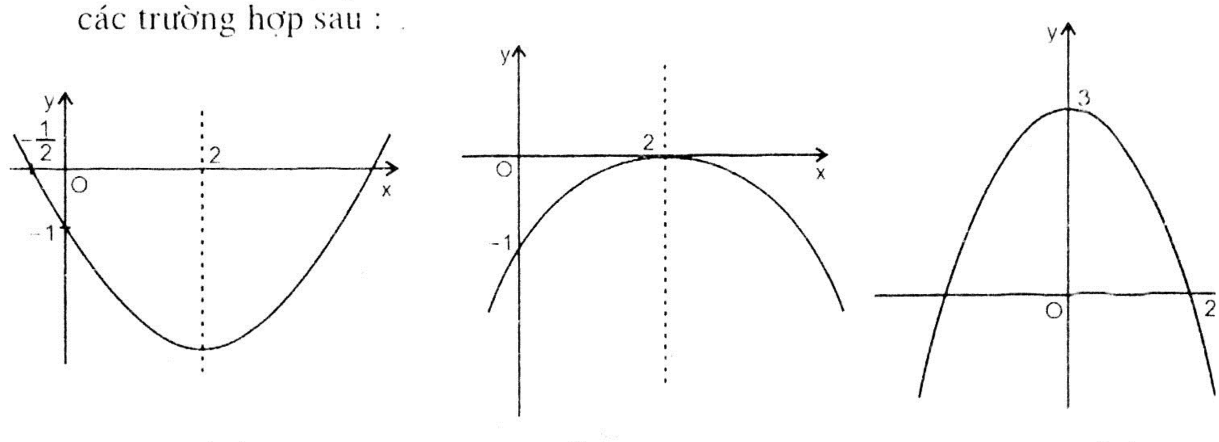
$-2.2^2 + 8.2 + c = 0 \Rightarrow c = -8$. Vậy, ta có $y = -2x^2 + 8x - 8$.

d) Vì parabol đi qua điểm P (2 ; −3), nên ta có $-2.2^2 + b.2 + c = -3$ (*)

Mặt khác, hoành độ của đỉnh là 3, tức là $-\dfrac{b}{2.a} = 3$, hay $-\dfrac{b}{2.(-2)} = 3 \Rightarrow b =$

Thay b = 12 vào (*) ta được c = −19. Vậy, phương trình của parabol cần tì
$y = -2x^2 + 12x - 19$.

Ví dụ 3. Viết công thức của hàm số bậc hai dựa trên đồ thị cụ thể của nó tr
các trường hợp sau :



(a) *(b)* *(c)*

Hình 25

Giải. Để viết được công thức của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (1) ta p
xác định các hệ số a, b, c dựa trên đồ thị cụ thể của chúng.

a) Đồ thị (h. 25a) cho ta biết : Trục đối xứng x = 2, đồ thị cắt các trục toạ
tại các điểm $\left(-\dfrac{1}{2} ; 0\right)$ và (0 ; −1). Vậy, ta có :

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \ ; \ a.0 + b.0 + c = -1 \Rightarrow c = -1 \ ;$$

$$a.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c = 0 \qquad (*)$$

Thay b = −4a và c = −1 vào (*) ta có $\frac{a}{4} + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{9}$. Từ đó : b = $-\frac{16}{9}$.

Vậy hàm số bậc hai có công thức $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - 1$

b) Dựa vào đồ thị (h. 25b) ta có : I(2 ; 0) và điểm (0 ; −1) thuộc đồ thị. Vậy

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \\ a.0 + b.0 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 4ac \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy, ta có công thức $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$

c) Đồ thị (h. 25c) cho ta : I(0 ; 3) và điểm (2 ; 0) thuộc đồ thị. Như vậy $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 3 \Rightarrow c = 3$ (vì b = 0) ; thay b = 0 và c = 3 vào (1), ta có : $y = ax^2 + 3$

Đồ thị đi qua điểm (2 ; 0) nên ta có : $4a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$

Công thức cần tìm sẽ là : $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

II. BÀI TẬP

3.1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = -2x^2 - 4\sqrt{2}x + 2$; b) $y = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x + 2$;

c) $y = 3(x + 1)^2$; d) $y = x^2 - 6x + 1$.

3.2. Xác định phương trình của parabol $y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng nó

a) Đi qua hai điểm P(1 ; −2) và Q(−2 ; 3)

b) Có đỉnh là I(1 ; 4) ;

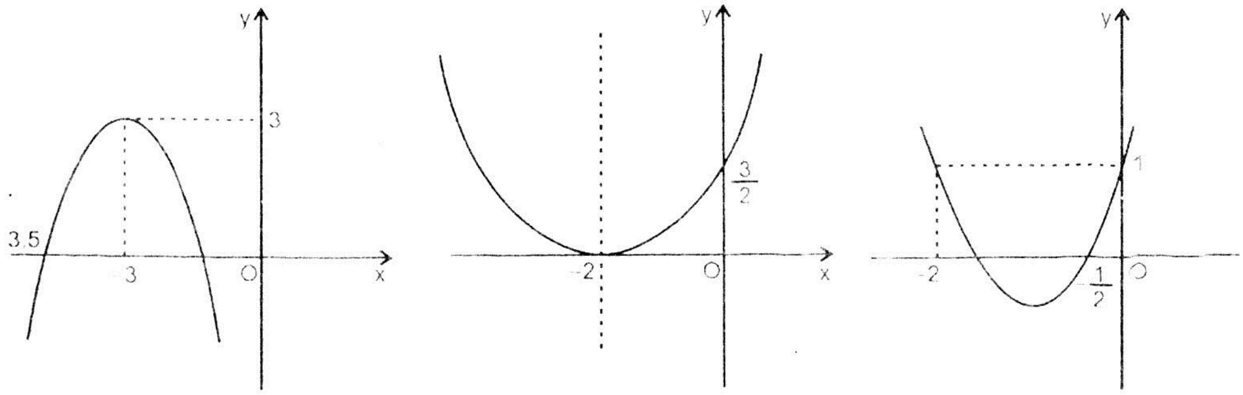
c) Cắt trục hoành tại hai điểm (3 ; 0) và (0 ; 0)

d) Có trục đối xứng là x = −3 và đi qua điểm (1 ; 1)

e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\frac{5}{4}$.

3.3. Xác định hàm số bậc hai, biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng $y = \sqrt{2}x - 1$ tại hai điểm có hoành độ là $\sqrt{2}$ và 1, x = 0 là trục đối xứng.

3.4. Dựa trên đồ thị cụ thể của hàm số bậc hai hãy viết công thức của nó trong cá trường hợp sau :



Hình 26

3.5. Hãy xác định các yếu tố : Toạ độ đỉnh, trục đối xứng, giao với trục tung hướng bề lõm của đồ thị (không vẽ đồ thị) hàm số :

a) $y = -3x^2 + 4$; b) $y = (x + 1)^2$;

c) $y = -\sqrt{2}\,x^2 + 3x - 1$; d) $3x^2 - 6x + 8$.

3.6. Tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số

a) $y = 3x^2 - 4x + 7$; b) $y = 5x^2 - 3$;

c) $y = -x^2 + 4x - 3$; d) $y = -x^2 + 2x - 78$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

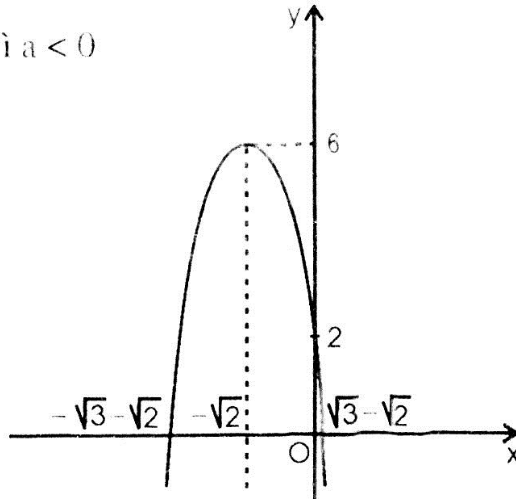
3.1. a) Hàm số bậc hai có $a = -2$; $b = -4\sqrt{2}$; $c = 2$

Đồ thị là đường parabol với đỉnh $I(-\sqrt{2}\ ; 6)$ vì $-\frac{b}{2a} = \frac{-4\sqrt{2}}{2.(-2)} = -\sqrt{2}$;

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{48}{-8} = 6$, bề lõm quay xuống dưới vì $a < 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$+\infty$
y		6	
	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$



Hình 27

Giao với trục tung là điểm (0 ; 2). Để tìm giao với trục hoành ta có phương trình

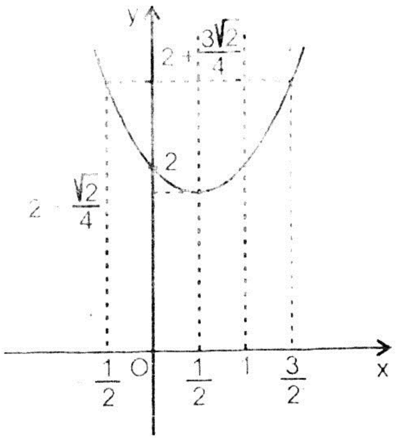
$$-2x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = -\sqrt{2}$. Đồ thị ở hình 27.

b) $a = \sqrt{2}$; $b = -\sqrt{2}$; $c = 2$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; -\frac{\Delta}{4a} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy parabol có $I\left(\frac{1}{2};2-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ và trục đối xứng $x=\frac{1}{2}$, cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ 2)$; bề lõm quay lên trên ; không cắt trục hoành. Có thể xác định thêm 2 điểm : Khi $x=-\frac{1}{2}$ và $x=\frac{3}{2}$ thì $y=2+\frac{3\sqrt{2}}{4}$, tức là đồ thị đi qua hai điểm $\left(-\frac{1}{2};2+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ và $\left(\frac{3}{2};2+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.



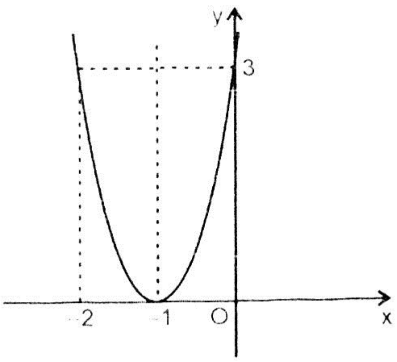
Hình 28

Đồ thị trên hình 28. Bảng biến thiên học sinh tự xây dựng.

c) Ta có thể viết lại công thức như sau :

$$y = 3x^2 + 6x + 3$$

Vậy, $a = 3$, $b = 6$, $c = 3$ và $-\frac{b}{2a} = -1$; $-\frac{\Delta}{4a} = 0$. Parabol có đỉnh $I(-1\ ;\ 0)$, trục đối xứng $x = -1$, cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ 3)$. Đồ thị thể hiện ở hình 29. Bảng biến thiên học sinh tự lập.

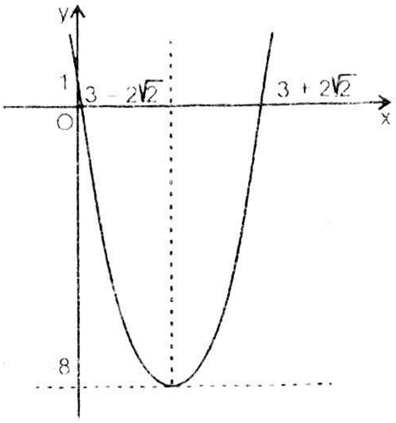


Hình 29

d) Có : $a = 1$; $b = -6$; $c = 1$. Từ đó : $-\frac{b}{2a} = 3$; $-\frac{\Delta}{4a} = -8$. Parabol có bề lõm quay lên trên, có trục đối xứng $x = 3$. Giao với các trục toạ độ : $(0\ ;\ 1)$, $(3 - 2\sqrt{2}\ ;\ 0)$ và $(3 + 2\sqrt{2}\ ;\ 0)$; toạ độ đỉnh $I(3\ ;\ -8)$. Đồ thị ở hình 30.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	−8	↗ $+\infty$



Hình 30

3.2. Các phương trình cần xác định đều có hệ số $b = 2$, chỉ còn phải tìm các hệ số a và c dựa vào các dữ liệu của từng trường hợp cụ thể.

a) Vì parabol đi qua hai điểm cụ thể P và Q, nên ta có hệ :

$$\begin{cases} a.1^2 + 2.1 + c = -2 \\ a(-2)^2 + 2(-2) + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -4 \\ 4a + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{3} \\ c = -\frac{23}{3} \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình $y = \frac{11}{3}x^2 + 2x - \frac{23}{3}$

b) Từ điều kiện ta có : $-\frac{b}{2a} = 1$ và $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 4$, với b = 2 đã biết.

Từ đó ta được a = −1 và c = 3.

Đáp số : $y = -x^2 + 2x + 3$

c) *Đáp số* : $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$

d) *Đáp số* : $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{4}{3}$

e) Từ điều kiện ta có hệ phương trình đối với a và c :

$$\begin{cases} a.0 + 2.0 + c = \frac{3}{2} \\ a.\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 2.\frac{5}{4} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{64}{25} \end{cases}$$

Vậy, phương trình của parabol cần tìm là $y = -\frac{64}{25}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

3.3. Vì x = 0 là trục đối xứng của parabol nên $-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$. Vậy parabol c

phương trình $y = ax^2 + c$. Việc còn lại là ta tìm các hệ số a và c. Vì parabol cắ đường thẳng $y = \sqrt{2}\,x - 1$ tại hai điểm mà hoành độ của chúng là $\sqrt{2}$ và 1 Tương ứng với chúng có các tung độ của giao điểm là : $y = \sqrt{2}\,.\sqrt{2} - 1 = 1$ v $y = \sqrt{2}\,.1 - 1 = \sqrt{2} - 1$. Vậy parabol đi qua hai điểm $(\sqrt{2}\ ;\ 1)$ và $(1\ ;\ \sqrt{2} - 1)$ Từ đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2a + \quad c = 1 \\ a + c = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 - \sqrt{2} \text{ và } c = \sqrt{2} - 1 - a = 2\sqrt{2} - 3.$$

Vậy hàm số bậc hai cần tìm là $y = (2 - \sqrt{2})x^2 + 2\sqrt{2} - 3$.

3.4. Hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Để xác định các hệ số a, b, c cụ thể ta dựa vào đồ thị của nó để lập hệ phương trình thích hợp đối với các ẩn a, b, c. Giải hệ, ta tìm được a, b và c.

a) Qua đồ thị ta biết toạ độ đỉnh I (−3 ; 3) và cắt trục hoành tại điểm (3,5 ; 0).

Vậy $-\frac{b}{2a} = -3$ (1) $-\frac{4ac - b^2}{4a} = 3$ (2) và $a.3{,}5^2 - 3{,}5b + c = 0$ (3)

(1) $\Rightarrow b = 6a$, thay vào (2) ta có $\frac{4ac - 36a^2}{4a} = 3 \Rightarrow c = 9a + 3$. Thay b và c vào (3)

ta được $12{,}25a - 21a + 9a + 3 = 0 \Rightarrow 0{,}25a = -3 \Rightarrow a = -12$; $b = -72$; $c = -105$

Vậy ta có $y = -3(4x^2 + 24x + 35)$

b) *Đáp số* : $y = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

c) Ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0 ; 1)$ nên hệ số $c = 1$. Ngoài ra có hai điểm nằm trên đồ thị là $(-2 ; 1)$ và $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} 4a - 2b + 1 = 1 \\ \frac{a}{4} - \frac{1}{2}b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy ta có : $y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1$

3.5. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$, giao với trục tung là điểm $(0 ; c)$, hướng bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$. Vậy, với mỗi trường hợp cụ thể ta có:

a) Ở đây : $a = -3$; $b = 0$; $c = 4 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0; -\frac{\Delta}{4a} = c = 4$. Vậy đồ thị có : toạ độ đỉnh là $I(0 ; 4)$, trục đối xứng : $x = 0$; giao với trục tung chính là đỉnh $I(0 ; 4)$; hướng bề lõm quay xuống dưới (vì $a = -3 < 0$).

b) *Đáp số* : Đỉnh $I(-1 ; 0)$; trục đối xứng $x = -1$; giao với trục tung là điểm $(0 ; 1)$; đồ thị có bề lõm quay lên trên.

c) *Đáp số* : Đỉnh $I\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{9\sqrt{2}}{8} - 1\right)$; trục đối xứng $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; giao với trục tung $(0 ; -1)$; bề lõm quay xuống dưới.

d) Ta có : $a = 3$; $b = -6$; $c = 8$. Từ đó : $-\frac{b}{2a} = 1; -\frac{\Delta}{4a} = 5$. Vậy ta có : đỉnh $I(1 ; 5)$; trục đối xứng $x = 1$; giao với trục tung là điểm $(0 ; 8)$; bề lõm quay lên trên.

3.6. Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$ nếu $a < 0$ ($a > 0$).

a) $a = 3$; $b = -4$; $c = 7 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$; $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{17}{3}$. Vậy hàm số có giá trị nhỏ nhất (vì $a > 0$) là $y_{min} = \frac{17}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$.

b) *Đáp số* : $y_{min} = -3$ khi $x = 0$

c) *Đáp số* : $y_{max} = 1$ khi $x = 2$

d) *Đáp số* : $y_{max} = 77$ khi $x = 1$.

ÔN CHƯƠNG 2

1. Tìm tập xác định của hàm số

a) $f(x) = \sqrt{10 - 4x} + \dfrac{1}{x + 1}$;

b) $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \dfrac{x}{(x - 3)(x + 7)}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x - 1}{x + 1}, & x \geq 0 \\ \sqrt{x + 1}, & x < 0. \end{cases}$

2. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên khoảng cho trước

a) $f(x) = 3x + 2$ trên R ; b) $f(x) = x^2 + 8x + 1$ trên $(0 ; +\infty)$.

3. Tìm giao điểm của parabol $y = -x^2 + 4x - 2$ với các đường thẳng :

a) $y = 3x - 2$; b) $y = 2x - 1$; c) $y = x + 1$.

bằng đồ thị và bằng cách giải phương trình.

4. Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 2$ và nhận giá trị bằng 2 khi $x = 1$.

5. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = \begin{cases} 2x + 3, & x \in (-\infty; -1) \\ x^2 + 1, & x \in [-1; 1] \\ 2x - 3, & x \in (1; +\infty) \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 1 + 2|x|, & x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \\ 4, & |x| > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = |x + 2| + |2 - x|$; b) $y = |x + 1| - |x - 2| + |x - 3|$

7. Vẽ đồ thị của hàm số và lập bảng biến thiên của nó :

a) $y = \begin{cases} x, & \text{với } x < 0 \\ x^2 + x & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$ b) $y = \left|\dfrac{2}{3}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}\right|$

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. *Đáp số*

a) $D = \left(-\infty ; \frac{5}{2}\right] \backslash \{-1\}$; b) $D = R \backslash \{-7, 3\}$; c) $D = [-1 ; +\infty]$.

2. a) Đồng biến trên R

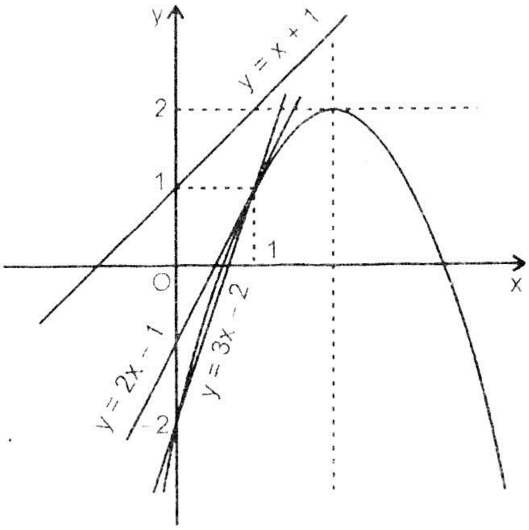
b) $\forall x_1, x_2 \in (0 ; +\infty), x_1 \neq x_2$ ta có :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 8x_1 + 1) - (x_2^2 + 8x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 + 8(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= x_1 + x_2 + 8 > 0 \text{ (vì } x_1, x_2 > 0).$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0 ; +\infty)$.

3. a) Parabol có đỉnh I (2 ; 2), trục đối xứng x = 2, giao với trục tung tại (0 ; − 2) các giao điểm với trục hoành là $(2 - \sqrt{2} ; 0)$ và $(2 + \sqrt{2} ; 0)$, bề lõm quay xuống dưới. Đường thẳng đi qua hai điểm (0 ; −2) và $\left(\frac{2}{3};0\right)$



Hình 31

Bằng đồ thị ta thấy parabol cắt đường thẳng tại hai điểm : (0 ; −2) và (1 ; 1) (h. 31)

Bằng cách giải phương trình, trước hết ta tìm hoành độ các giao điểm, đó là nghiệm của phương trình :

$$-x^2 + 4x - 2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

ứng với x = 0 ta có y = −2 và ứng với x = 1 có y = 3.1 − 2 = 1.

Vậy các giao điểm là : (0 ; −2) và (1 ; 1)

b) Bằng đồ thị (h. 31) có : parabol $y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ tiếp xúc với nhau tại điểm (1 ; 1).

Bằng cách giải phương trình ta có :

$$-x^2 + 4x - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1.$$

Phương trình có nghiệm kép x = 1.

c) *Đáp số* : Parabol và đường thẳng không cắt nhau (h. 31).

4. Theo điều kiện ta có : $-\frac{b}{2a} = 2$; $-\frac{\Delta}{4a} = 1$ và a + b + c = 2

Giải ra ta được a = 1 ; b = −4 ; c = 5. Vậy, ta có $y = x^2 - 4x + 5$.

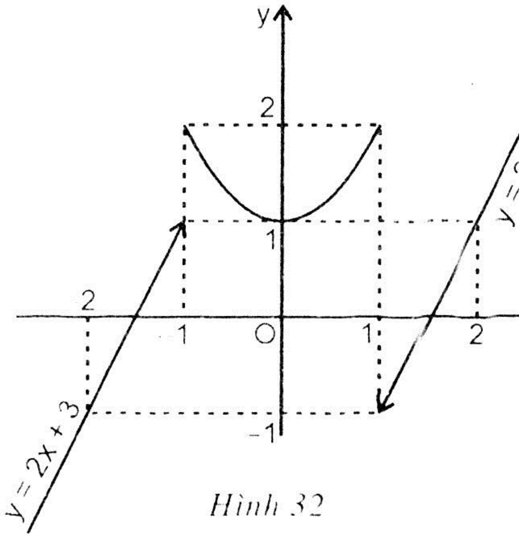
5. a) Hàm số được cho bằng ba biểu thức trên ba khoảng khác nhau.

• Trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ hàm số là đồng biến, vì nó là hàm số bậc nhất với số $a = 2 > 0$. Đồ thị là một nửa đường thẳng. Điểm $(-1\ ;\ 1)$ không nằm trên thị.

• Trên khoảng $[-1\ ;\ 1]$ là hàm số chẵn nên có trục đối xứng là $x = 0$. Đồ thị của nó là một phần parabol. Hàm số giảm trên $(-1\ ;\ 0)$ và tăng trên $(0\ ;\ 1)$.

Trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$ hàm số tăng. Đồ thị của nó là nửa đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ tức là song song với nửa đường thẳng $y = 2x + 3$. Điểm $(1\ ;\ -1)$ không thuộc đồ thị.

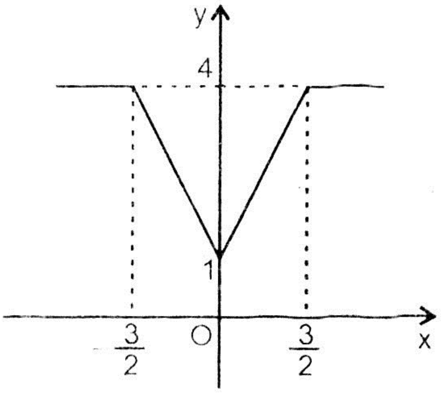
Kết hợp lại, đồ thị của hàm số đã cho được thể hiện ở hình 32.



Hình 32

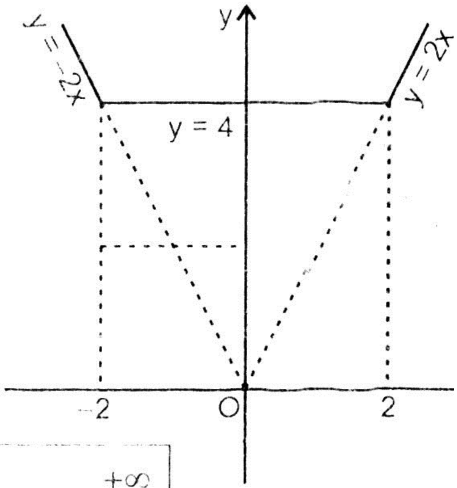
b) Biện luận tương tự ta thấy, hàm số không đổi trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$; và $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\dfrac{3}{2}; 0\right)$ và đồng biến trên $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Đồ thị của hàm số được thể hiện trên hình 33.



Hình 33

6. a) Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối ta chia trục số ra các khoảng, mà mút của chúng là các giá trị làm cho các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối bằng không, xếp từ nhỏ đến lớn. Cuối cùng, ta có biểu thức của hàm số y trong từng khoảng khác nhau:



Hình 34

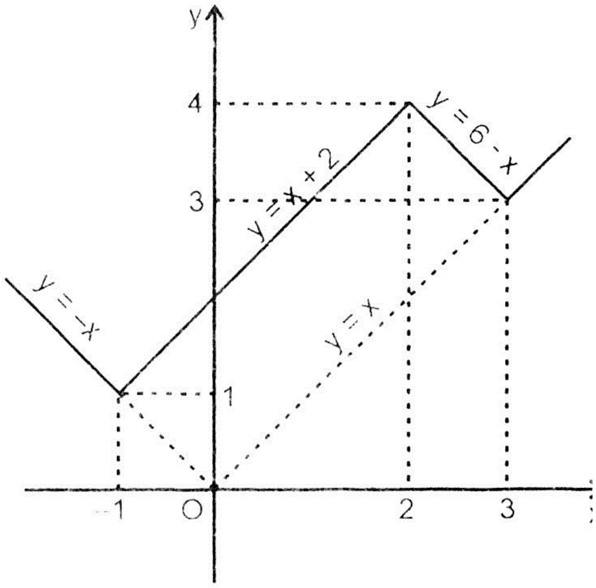
x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$\lvert x + 2\rvert =$	$-x - 2$	0	$x + 2$	4	$x + 2$
$\lvert 2 - x\rvert =$	$-x + 2$	4	$-x + 2$	0	$x - 2$
$y =$	$-2x$	4	4	4	$2x$

Đồ thị được thể hiện ở hình 33.

b) Thực hiện tương tự như bài trên, ta có bảng sau để viết biểu thức của y tron
từng khoảng tương ứng.

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert =$	$-x-1$	0	$x+1$	3	$x+1$	4	$x+1$
$-\lvert x-2\rvert =$	$x-2$	-3	$x-2$	0	$-x+2$	-1	$-x+2$
$\lvert x-3\rvert =$	$3-x$	4	$3-x$	1	$3-x$	0	$x-3$
$y =$	$-x$	1	$x+2$	4	$6-x$	3	x

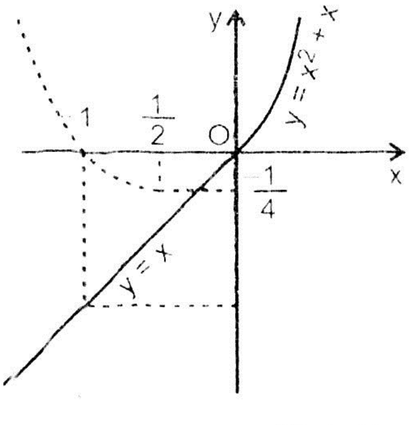
Qua bảng ta có thể xác định tính tăng giảm của hàm số trên mỗi khoảng : chẳng hạn trên $(-1 ; 2)$ hàm số tăng. Đồ thị trên hình 35.



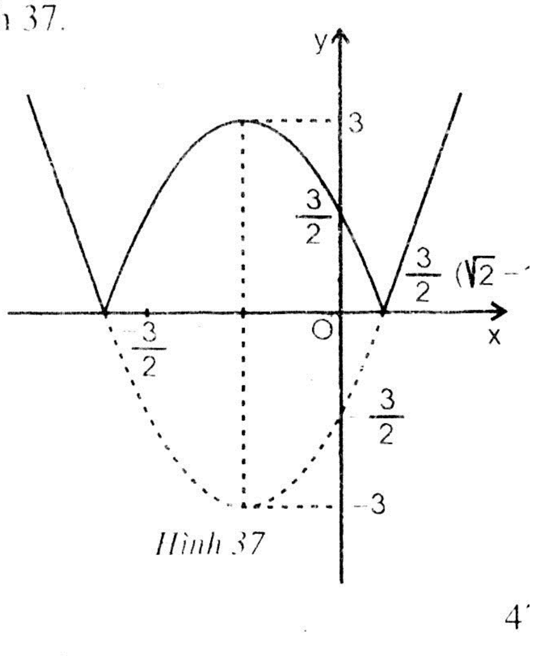
Hình 35

7. a) Đồ thị ở hình 36.

b) Để vẽ đồ thị của hàm số $|f(x)|$ ta vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$, sau đó giữ lạ phần đồ thị của $f(x)$ nằm phía trên trục hoành, lấy đối xứng qua trục hoànl phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành. Đồ thị của $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ cc đỉnh $I\left(-\frac{3}{2};-3\right)$, có trục đối xứng $x = -\frac{3}{2}$. Đồ thị của hàm sc $\left|\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right|$ là phần nét đậm trên hình 37.



Hình 36



Hình 37

CHƯƠNG III

PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình một ẩn : Cho hai hàm số f(x) và g(x) có miền xác định là X_1, X_2. Đặt $X = X_1 \cap X_2$. Đẳng thức f(x) = g(x) (1) được gọi là phương trình một ẩn, trong đó x là ẩn, X gọi là miền xác định của phương trình hay còn gọi là điều kiện xác định của phương trình (ĐKXĐ). Có thể nói vắn tắt như sau :

(ĐKXĐ của phương trình là điều kiện của x để f(x) và g(x) đều có nghĩa.)

2. Nghiệm và tập hợp nghiệm

Nếu $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Tập hợp S gồm tất cả các nghiệm của (1) gọi là tập nghiệm của (1).

3. Giải phương trình là tìm tập hợp S.

Nếu $S = \varnothing$ hoặc không có giá trị nào của x thỏa mãn ĐKXĐ thì ta nói phương trình vô nghiệm.

Nếu S có vô số phần tử thì ta nói phương trình vô số nghiệm.

4. Phương trình tương đương

- Hai phương trình f(x) = g(x) và $f_1(x) = g_1(x)$, gọi là *tương đương* nếu chúng có *tập nghiệm bằng nhau*. Kí hiệu là

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

- Nếu ta thực hiện các phép biến đổi sau, mà không làm thay đổi ĐKXĐ của phương trình thì ta được một phương trình mới tương đương.

Cộng (hay trừ) hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.

Nhân (hay chia) hai vế với cùng một số khác 0 hoặc một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

5. Phương trình hệ quả : Nếu mỗi một nghiệm của phương trình f(x) = g(x) đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ là phương trình hệ quả của phương trình f(x) = g(x), kí hiệu là $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Chú ý :

- Khi bình phương hai vế của một phương trình ta thường được một phương trình mới là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
- Khi nhân hay chia hai vế của một phương trình cho một biểu thức ta chưa chắc được một phương trình tương đương (có thể xảy ra hiện tượng thêm nghiệm hoặc mất nghiệm).

6. Nghiệm ngoại lai : $f(x) = g(x)\ (1) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x) \quad (2)$

Phương trình hệ quả (2) có thể có *nghiệm ngoại lai*, không phải là nghiệm của (1). Muốn loại nghiệm ngoại lai ta phải thử các nghiệm tìm được vào (1) để xác định nghiệm của (1).

7. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài phương trình một ẩn, ta còn xét các *phương trình nhiều ẩn*. Nghiệm của phương trình *hai ẩn* là cặp số thực $(x_0; y_0)$ thỏa mãn phương trình đó. Nghiệm của phương trình *ba ẩn* là một bộ ba số thực (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn phương trình đó.

8. Tham số

Trong một phương trình ngoài các chữ là ẩn số còn có những chữ khác không phải là ẩn số, được xem như những hằng số được gọi là *tham số*.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số là tìm điều kiện của tham số phương trình có nghiệm (và tìm các nghiệm đó) hoặc vô nghiệm.

Ví dụ 1. Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình

$$\frac{16}{x^2 - 9} = \sqrt{x - 4}$$

là : A. $x > 4$ và $x \neq \pm 3$. B. $x \neq \pm 3$. C. $x > 3$.

D. $x > 4$. E. $x > 4$ và $x \neq 3$

Giải: Muốn vế trái có nghĩa thì $x \neq \pm 3$, muốn vế phải có nghĩa thì $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$. Kết hợp cả hai điều kiện ta có $x > 4$. Vậy đáp án C đúng.

Ví dụ 2. Điều kiện xác định của phương trình $1 + \sqrt{1 - x} = \sqrt{x - 2}$ là :

A. $x < 1$ B. $x > 2$ C. $x \neq 1$ D. $x \neq 2$

E. Không có giá trị x nào.

Giải: Muốn vế trái có nghĩa $1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$

Muốn vế phải có nghĩa $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Như vậy x phải thỏa mãn hệ $\begin{cases} 1 \geq x \\ x > 2 \end{cases}$ (mâu thuẫn)

Do đó E đúng.

Ví dụ 3. Các cặp phương trình sau đây có tương đương không ? Nếu không thì phương trình nào là phương trình hệ quả của phương trình còn lại ?

a) $3x - 5 = 1$ và $|3x - 5| = 1$; b) $2x - 1 = 1$ và $(2x - 1)^2 = 1$.

Giải: a) ĐKXĐ của hai phương trình đầu là với mọi $x \in R$. Tập nghiệm $S_1 = \{2\}$, tập nghiệm $S_2 = \{2; \frac{4}{3}\}$ suy ra hai phương trình đã cho không tương đương và phương trình $|3x - 5| = 1$ là hệ quả của phương trình $3x - 5 = 1$.

b) ĐKXĐ của hai phương trình : $\forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình hai là phương trình hệ quả của phương trình một.

II. BÀI TẬP

1. Tìm điều kiện xác định rồi giải các phương trình sau :

a) $x^2 - \frac{1}{x-1} = 9 - \frac{1}{x-1}$; b) $3x + \frac{2}{x-5} = 15 + \frac{2}{x-5}$.

2. Tìm điều kiện xác định rồi giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{x+1} = x+1$; b) $\sqrt{x-1} = 1-x$.

3. Các cặp phương trình sau có tương đương không ? Nếu không thì phươn trình nào là hệ quả của phương trình còn lại.

a) $3x - 2 = 1$ và $(3x-2)^2 = 1$; b) $2(x-1) = x$ và $2x(x-1) = x^2$.

4. Cho ba phương trình (I); (II); (III) Chứng minh rằng nếu phương trình (I tương đương với phương trình (II) trên X, và phương trình (II) tương đươn với phương trình (III) trên X, thì (I) tương đương với (III) trên X. (X là điề kiện xác định).

5. Tìm điều kiện của m để hai phương trình sau tương đương

a) $(x+1)^2 = 0$ và $x^2 = 2mx + m$ (m là tham số)

b) $x^2 + x + 1 = 0$ và $mx^2 - (2m+1)x + (m+2) = 0$ (m là tham số)

6. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{11+2x}{\sqrt{22-x}} = \sqrt{22-x}$; b) $21 + \sqrt{2x-7} = x + \sqrt{2x-7}$

c) $2\sqrt{x+5} = \frac{x+2}{\sqrt{x+5}}$; d) $3x - \sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{-2-2x}$.

7. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$ b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = \frac{1}{5}$.

c) $\sqrt{2x+10} - \sqrt{x-2} = \frac{16}{\sqrt{2x+10} + \sqrt{x-2}}$.

8. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{2}{x-1} + x = \frac{x+1}{x-1}$; b) $\frac{x^2+3}{x+3} = 2$

c) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-a)(x-1)}$ d) $\frac{1}{2x^2-x+1} + \frac{3}{2x^2-x+3} = \frac{10}{2x^2-x+7}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) VP và VT có nghĩa với $x \neq 1$. Vậy điều kiện xác định của phương rình là $x \neq 1$.

$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \neq 1$. Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\{\pm 3\}$

d) $3x + \dfrac{2}{x-5} = 15 + \dfrac{2}{x-5}$. ĐKXĐ : $x \neq 5$

$3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$ không thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy phương trình vô nghiệm.

2. a) $\sqrt{x+1} = x + 1$, ĐKXĐ : $x \geq -1$

$x + 1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$;

$x = 0$; $x = -1$, đều thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -1$.

b) $\sqrt{x-1} = 1 - x$

$\forall x \geq 1$ thì VT $= \sqrt{x-1} \geq 0$, VP $= 1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Vậy ĐKXĐ là $x = 1$

Do đó nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm chỉ có thể là $x = 1$.

Với $x = 1$ thì $\sqrt{1-1} = 1 - 1 = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

3. a) $3x - 2 = 1$ (1) ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in R$. Vậy tập hợp nghiệm $S_1 = \{1\}$

$(3x - 2)^2 = 1$ (2). ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 1 \\ 3x - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \subset \mathbb{R} \\ x = \dfrac{1}{3} \subset \mathbb{R} \end{array}\right.$$

. Vậy tập hợp nghiệm $S_2 = \left\{1; \dfrac{1}{3}\right\}$

Hai phương trình không có cùng một tập hợp nghiệm nên không tương đương.

Vì $S_2 \supset S_1$ nên phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1)

b) $2(x - 1) = x$ (1) ĐKXĐ : $\forall x \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x - 2 = x \Leftrightarrow x = 2 \in \mathbb{R}$. Vậy $S_1 = \{2\}$

$2x(x - 1) = x^2$ (2). ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$

$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$. Vậy $S_2 = \{0; 2\}$

Hai phương trình này không tương đương vì $x = 0$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1), $S_1 \supset S_2$, nên phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

4. Gọi tập nghiệm của phương trình (I), (II), (III) lần lượt là S_1, S_2, S_3 với cùng một điều kiện xác định X.

Ta có (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\Leftrightarrow S_1 = S_2$ (1), (II) $\Leftrightarrow$ (III) $\Leftrightarrow S_2 = S_3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_1 = S_3$ với cùng một điều kiện xác định X suy ra (I) $\Leftrightarrow$ (III) (đpcm).

5. a) $(x + 1)^2 = 0$ (1), ĐKXĐ : $\forall x \subset \mathbb{R}$, phương trình này có một nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$.

$mx^2 - (2m + 1)x + m + 2 = 0$ (2). ĐKXĐ : $\forall x \subset \mathbb{R}$

Muốn (2) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép bằng -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{2m+1}{2m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+2) = 0 \\ \dfrac{2m+1}{2m} = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m = 0 \\ 4m + 1 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của m để hai phương trình tương đương.

b) Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ (1) vô nghiệm (vì $\Delta = -3 < 0$).

Muốn $mx^2 - (2m + 1)x + (m + 2) = 0$ (2) tương đương với (1)

$\Leftrightarrow \Delta_{(2)} < 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m(m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Vậy với $m < \frac{1}{4}$ thì hai phương trình tương đương.

6. a) $\dfrac{11 + 2x}{\sqrt{22 - x}} = \sqrt{22 - x}$ (1) ĐKXĐ : $x < 22$

(1) $\Rightarrow 11 + 2x = \sqrt{22 - x} . \sqrt{22 - x} \Rightarrow 11 + 2x = 22 - x \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} < 22$.

Vậy $x = \frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình.

b) $21 + \sqrt{2x - 7} = x + \sqrt{2x - 7}$ (2) ĐKXĐ : $x \geq 3,5$

(2) $\Rightarrow x = 21$ thỏa mãn ĐKXĐ nên $x = 21$ là nghiệm của phương trình.

c) $2\sqrt{x + 5} = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x + 5}}$ (3). ĐKXĐ : $x > -5$

(3) $\Rightarrow 2(x + 5) = x + 2) \Leftrightarrow x = -8 < -5$ (không thỏa mãn ĐKXĐ) n
phương trình (3) vô nghiệm.

d) $3x - \sqrt{x + 1} + 1 = -2(x + 1)$ (4)

Muốn VP có nghĩa thì $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$
Muốn VT có nghĩa thì $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
Vậy ĐKXĐ của (4) : $x = -1$.
Nhưng $x = -1$ không phải là nghiệm của (4) nên phương trình (4) vô nghiệ

7. a) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} + \sqrt{(x + 1)^2} = 3$

$\Leftrightarrow |2x - 1| + |x + 1| = 3$ (*)

- Nếu $x < -1$, (*) $\Leftrightarrow -(2x - 1) - (x + 1) = 3 \Leftrightarrow x = -1$ (loại)
- Nếu $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, (*) $\Leftrightarrow -(2x - 1) + (x + 1) = 3 \Leftrightarrow x = -1$
- Nếu $x \geq \frac{1}{2}$, (*) $\Leftrightarrow 2x - 1 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$, $x = 1 \Rightarrow S = \{-1; 1\}$

b) Muốn VP có nghĩa thì $x \geq 3$

Muốn VT có nghĩa thì $x \leq 3$

Vậy ĐKXĐ: $x = 3$.

Mà $x = 3$ không phải là nghiệm của phương trình. Vậy phương trình vô nghiệm ($S = \varnothing$).

c) ĐKXĐ : $\begin{cases} 2x + 10 > 2 \Leftrightarrow x > -5 \\ x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

(c) $\Rightarrow 2x + 10 - (x - 2) = 16 \Leftrightarrow x + 12 = 16 \Leftrightarrow x = 4 > 2$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình. ($S = \{4\}$).

8. a) ĐKXĐ : $x \neq 1$

(a) $\Rightarrow 2 + x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1$

không thỏa mãn ĐKXĐ nên phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $x \neq -3$

(b) $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 3 \neq -3$

Thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

c) ĐKXĐ : $x \neq a,\ x \neq 1$

(c) $\Rightarrow x - 1 + x - a = 2$

$2x = 3 + a$

$x = \dfrac{3 + a}{2}$

Nếu $a = -1$ thì $x = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$ (bị loại) phương trình vô nghiệm.

Nếu $a \neq 1$ thì phương trình luôn có một nghiệm $x = \dfrac{3 + a}{2}$.

d) Ta có : $2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $2x^2 - x + 3 > 0$, $2x^2 - x + 7 > 0$

Vậy ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $2x^2 - x + 1 = t\ (t > 0)$. Từ phương trình đã cho ta có phương trình

$\dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t + 2} = \dfrac{10}{t + 6} \Leftrightarrow (t + 2)(t + 6) + 3t(t + 6) = 10t\,(t + 2)$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Vậy $2x^2 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ;\ x = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó phương trình có hai nghiệm $x = 1\ ;\ x = -\dfrac{1}{2}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Phương trình bậc nhất* $ax + b = 0$, ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$

Cách giải và biện luận :

- $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
- $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm
- $a = 0$ và $b = 0$, phương trình có vô số nghiệm

2. *Phương trình bậc hai :* $ax^2 + bx + c = 0$, ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cách giải và biện luận :

$\Delta = b^2 - 4ac$	hoặc	$\Delta' = b'^2 - ac$ (khi $b = 2b'$)
• $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm		• $\Delta' < 0$, phương trình vô nghiệm
• $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$		• $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b'}{a}$
• $\Delta > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$		• $\Delta' > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

3. *Định lí Viet* .

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì tổng và tích ha nghiệm là :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

4. Ứng dụng của định lí Viet

- Tìm hai số biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số x_1 và x_2 có tổng $x_1 + x_2 = S$ và tích $x_1x_2 = P$ thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.
- Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có :

* $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 1$, nghiệm kia là $x = \frac{c}{a}$.

* $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -1$, nghiệm kia là $x = -\frac{c}{a}$

5. *Phương trình trùng phương* : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Cách giải : đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0) \Rightarrow x^4 = t^2$ đưa về phương trình bậc hai đối với ẩn t : $at^2 + bt + c = 0$. Giải phương trình này tìm t, sau đó tìm x.

6. *Phương trình có dấu giá trị tuyệt đối* : $|f(x)| = |g(x)|$. Ta có

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2.$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

7. *Phương trình vô tỉ* là phương trình có chứa ẩn số trong dấu căn thức.

Đối với phương trình có chứa dấu căn thức bậc hai thường bình phương hai vế để khử dấu căn đưa tới một phương trình hệ quả.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$ (1)

Giải. $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 - 1$:

* Nếu $m \neq -1$ và $m \neq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m-1}{m-2}$

* Nếu $m = -1$ thì (1) trở thành $0x = 0$: phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

* Nếu $m = 2$ thì (1) trở thành $0x = 3$: phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $5x(2x + 3)(3x - 1)(4x - 5) = 0$; b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

Giải: a) $5x(2x + 3)(3x - 1)(4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} * \ 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ * \ 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2} \\ * \ 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \\ * \ 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 0$; $x = -\dfrac{3}{2}$; $x = \dfrac{1}{3}$; $x = \dfrac{5}{4}$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} * \ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ * \ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ * \ x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{array}\right.$$

Tập hợp nghiệm của phương trình là $\{2; 1; -1\}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{|x-4|}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x+5}{36}$; b) $|x - 1| + |x + 2| + |x - 3| = 14$

Giải:

a) * Với $x \geq 4$ thì $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow |x-4| = x - 4$ ta có phương trình :

$$\frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36} \Leftrightarrow 9x + 27 - 4x + 16 = 18 - x - 5$$

$$\Leftrightarrow 6x = -30 \Leftrightarrow x = -5 < 4 \text{ (loại)}$$

Vậy $x = -5$ không phải là nghiệm.

* Với $x < 4$ thì $x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow |x-4| = -x + 4$ ta có phương trình :

$$\frac{x+3}{4} - \frac{-x+4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+5}{36} \Leftrightarrow 9x + 27 + 4x - 16 = 18 - x - 5$$

$$\Leftrightarrow 14x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} < 4.$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{7}$.

b) Bỏ dấu giá trị tuyệt đối

x	$-\infty$	-2		1		3	
$\|x-1\|$	$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$-x-2$		$x+2$		$x+2$
$\|x-3\|$	$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$
$\|x-1\|+\|x+2\|+$ $+\|x-3\|$	$-3x+2$	8	$-x+6$	5	$x+4$	7	$3x-2$

* Với $x < -2$ ta có : $-3x + 2 = 14$

$$-3x = 12$$

$x = -4 < -2$. Vậy $x = -4$ là nghiệm của phương trình

* Với $-2 \leq x < 1$ ta có : $-x + 6 = 14 \Leftrightarrow x = -8 < -2$ (bị loại)

* Với $1 \leq x < 3$ ta có : $x + 4 = 14 \Leftrightarrow x = 10 > 3$ (bị loại)

* $x = 3$ ta có $7 = 14$ vô lí nên $x = 3$ (bị loại)

* Với $x > 3$, ta có phương trình : $3x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} > 3$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -4$; $x = 5\frac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

a) $(x-3)^2 + (x+4)^2 - (x-5)^2 = 17x + 24$; b) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$

Giải: a) $(x-3)^2 + (x+4)^2 - (x-5)^2 = 17x + 24 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.(-24) = 25 + 96 = 121$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+11}{2} = 8 \;;\; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-11}{2} = -3.$$

b) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$. ĐKXĐ : $x \neq -5, x \neq -2$

$(3x-7)(x+2) = (x+5)(x-3) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$a + b + c = 2 - 3 + 1 = 0$

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ đều thỏa mãn ĐKXĐ.}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$

Ví dụ 5. Giải và biện luận theo tham số m

a) $5x^2 - 2x + m = 0$; b) $x^2 + 2mx + 1 = 0$

Giải: a) $5x^2 - 2x + m = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - 5m$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{5}$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$: phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{1}{5}.$$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - 5m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{5}$: phương trình có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-5m}}{5}$$

b) $x + 2mx + 1 = 0$

$\Delta' = m^2 - 1$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 1 \Leftrightarrow |m| < 1$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$: phương trình có nghiệm kép :

– Nếu $m = 1$ thì nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -1$

– Nếu $m = -1$ thì nghiệm kép là $x_1 = x_2 = 1$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$: phương trình có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2-1}}{1} = -m \pm \sqrt{m^2-1}.$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$x^2 + 2mx + 1 = 0$ (1) và $x^2 + (m - 2)x + m^2 - 1 = 0$

Giải. Phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có $\Delta_1 = 4m^2 - 4$

Phương trình $x^2 + (m - 2)x + m^2 - 1 = 0$ có

$\Delta_2 = (m - 2)^2 - 4.1.(m^2 - 1) = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 4 = -3m^2 - 4m + 8$

$\Delta_1 + \Delta_2 = 4m^2 - 4 + 3m^2 - 4m + 8 = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2.$

$\Delta_1 + \Delta_2 = (m - 2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ ít nhất một trong 2 biệt số Δ_1, Δ_2 không âm

$\Rightarrow$ ít nhất một trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 7. Cho phương trình : $mx^2 - (2m - 1)x + m + 2 = 0$ (1)

Tìm hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 của (1) không phụ thuộc vào tham số m

Giải. (*) Nếu m = 0 thì (1) trở thành x + 2 = 0. Phương trình có nghiệ duy nhất x = −2.

(**) Nếu $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai.

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2m - 1)]^2 - 4m(m + 2)$

$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m = -12m + 1$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow = -12m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{12}$ $(m \neq 0)$.

Với $m \leq \dfrac{1}{12}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2. Theo định lí Vi ét :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m - 1}{m} = 2 - \dfrac{1}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m + 2}{m} = 1 + \dfrac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 4 - \dfrac{2}{m} \\ x_1x_2 = 1 + \dfrac{2}{m}. \end{cases}$$

$$\overline{}$$

$$2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 5$$

Vậy nếu $m \leq \dfrac{1}{12}$ và $m \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 liên h với nhau bởi hệ thức : $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 5$.

Ví dụ 8. Giải phương trình :

a) $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$; b) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$.

Giải. a) $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 + 5x - 3) = 0$

* $x^2 + 3 \geq 3 > 0$

* $x^2 + 5x - 3 = 0$, $\Delta = 25 + 12 = 37$; $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$

b) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ ta có phương trình

$t^2 + 5t - 6 = 0$. Ta có $a + b + c = 1 + 5 - 6 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$ (loại)

$t = x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$; $x = -1$.

c) $x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$ (*)

Thay $x = 0$ vào (*) thì VT = 1 : VP = 0. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của (*).

Chia 2 vế của (*) cho x^2 $(\neq 0)$

$$x^2 - 5x - 2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(5x - \frac{5}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = 0 \qquad (**)$$

Đặt: $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

Thay vào (**) ta có phương trình :

$$t^2 + 2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow t(t - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = 5 \end{array}\right.$$

* Với $t = 0$ ta có $x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

* Với $t = 5$ ta có $x - \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 25 + 4 = 29$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm :

$$x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2};\ x_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}.$$

Ví dụ 9. Giải phương trình

a) $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$; b) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} = 2$.

Giải. a) $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ (1)

Miền xác định $x \geq 3$

Với $x \ge 3$; 2 vế không âm, bình phương 2 vế (1) được :

$$2x + 1 = 4 + x - 3 + 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (4\sqrt{x-3})^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 48 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4,\ x_2 = 12 \\ x \ge 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } x > 3)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

b) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}} = 2$

Miền xác định : $(-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Đặt $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} = t\ (t > 0)$ thì $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}} = \dfrac{1}{t}$, ta có phương trình :

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = 2$.

II. BÀI TẬP

1. Giải phương trình

a) $\dfrac{x+1}{1995} + \dfrac{x-1}{1997} = \dfrac{x-2}{1998} + \dfrac{x}{1996}$; b) $\dfrac{x-2}{995} + \dfrac{x}{997} = \dfrac{x-1}{996} + \dfrac{x+1}{998}$.

2. Giải và biện luận các phương trình

a) $\dfrac{x-a}{a} - b = \dfrac{x-b}{b} - a\ (a, b \ne 0)$; b) $(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x$.

3. Giải và biện luận

a) $\dfrac{x+ab}{a+1} + \dfrac{x+bc}{c+1} + \dfrac{x+b^2}{b+1} = 3b\ (a, b, c \ne -1)$

b) $\dfrac{x-b-c}{a} + \dfrac{x-c-a}{b} + \dfrac{x-a-b}{c} = 3\ (a, b, c \ne 0)$

4. Giải và biện luận

a) $\dfrac{1}{x+a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{x}\ (a \ne 0, b \ne 0)$; b) $\dfrac{a}{x-a} + \dfrac{3a^2 - 4a + 3}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{x+a}$.

5. Giải phương trình :

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

b) $x^3 + x^2 - 2 = 0$;

c) $x^3 - 7x = 6$

d) $x^4 + x^3 + 6x^2 = -5(x + 1)$.

6. Giải phương trình :

a) $|x - 1| + |2 - x| = 2x$; b) $|1 - x| - |x - 2| - |x - 3| = \frac{1}{2}$.

7. Giải phương trình :

a) $x + \sqrt{x - 1} = 2$; b) $\sqrt{25x^2 - 25} + 5x = 2$.

8. Xác định m để phương trình

a) $x^2 - mx + m + 1 = 0$ có một nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$. Tính nghiệm còn lại.

b) $2x^2 - 3m^2x + m = 0$ có một nghiệm là $x_1 = 1$. Tìm nghiệm còn lại.

9. Giải và biện luận theo tham số m :

a) $2x^2 + 12x - 15m = 0$; b) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

10. Chứng minh rằng nếu có $ap > 2(b + q)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm : $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + px + q = 0$.

11. Chứng minh rằng nếu 2 phương trình

$$f(x) = x^2 + px + q = 0 \text{ và } g(x) = x^2 + p_1x + q_1 = 0$$

vô nghiệm thì phương trình $f(x) + g(x) = 0$ cũng vô nghiệm.

12. Xác định m để phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + m(m - 3) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

13. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình

$x^2 + (m - 1)x - m = 0$, không phụ thuộc vào m.

14. Xác định m để phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu :

a) $2x^2 - 4(m + 1)x + m - 2 = 0$; b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

15. Xác định m để phương trình $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

16. Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$. Xác định m để phương trình có :

a) hai nghiệm dương phân biệt.

b) hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}$.

17. Tìm cặp số (x, y) nghiệm đúng phương trình $yx^2 - 4x + y - 3 = 0$
sao cho : a) y đạt GTLN có thể được.
b) y đạt GTNN có thể được.

18. Giải phương trình :

a) $x^3 + x^2 - 2 = 0$; c) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$

b) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0$; d) $x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 20x + 16 = 0$.

19. Giải phương trình :

a) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8} = 5$; b) $x^2 - 2x - 7 + 3\sqrt{(x + 1)(x - 3)} = 0$.

20. Cho b và c là hai số khác 0 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằn nhất một trong hai phương trình sau phải có nghiệm :

$$x^2 + bx + c = 0\ (1) \text{ và } x^2 + cx + b = 0\ (2).$$

21. Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm dương x_1 và x_2. Hãy phương trình bậc hai theo y mà các nghiệm là

$$y_1 = \sqrt{x_1},\ y_2 = \sqrt{x_2}\ .$$

22. Giải và biện luận $|x - 1|(x + 2) + m = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $\frac{x+1}{1995} + \frac{x-1}{1997} = \frac{x-2}{1998} + \frac{x}{1996}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{1995} + 1\right) + \left(\frac{x-1}{1997} + 1\right) - \left(\frac{x-2}{1998} + 1\right) - \left(\frac{x}{1996} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1996}{1995} + \frac{x+1996}{1997} - \frac{x+1996}{1998} - \frac{x+1996}{1996} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1996)\left(\frac{1}{1995} + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} - \frac{1}{1996}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1996 \text{ (vì } \frac{1}{1995} + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} - \frac{1}{1996} \neq 0)$$

b) $\frac{x-2}{995} + \frac{x}{997} = \frac{x-1}{996} + \frac{x+1}{998}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{995} - 1\right) + \left(\frac{x}{997} - 1\right) - \left(\frac{x-1}{996} - 1\right) - \left(\frac{x+1}{998} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-997}{995} + \frac{x-997}{997} - \frac{x-997}{996} - \frac{x-997}{998} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 997)\left(\frac{1}{995} + \frac{1}{997} - \frac{1}{996} - \frac{1}{998}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 997.$$

2. a) $\frac{x-a}{a} - b = \frac{x-b}{b} - a\ \ (a \neq 0, b \neq 0)$ ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{x-a}{a} - b = \frac{x-b}{b} - a \Leftrightarrow b.x - a.b - a.x + a.b = a.b(b - a) \Leftrightarrow (b - a)x = a.b(b -$

– Nếu $a \neq b$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = ab$. $(a \neq 0, b \neq 0)$.

– Nếu $a = b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x$ (HS tự giải)

3. a) $\frac{x+a.b}{a+1}+\frac{x+b.c}{c+1}+\frac{x+b^2}{b+1}=3b\ (a,b,c\neq -1)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x+a.b}{a+1}-b\right)+\left(\frac{x+b.c}{c+1}-b\right)+\left(\frac{x+b^2}{b+1}-b\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{x+a.b-a.b-b}{a+1}+\frac{x+b.c-b.c-b}{c+1}+\frac{x+b^2-b^2-b}{b+1}=0$

$\Leftrightarrow(x-b)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{b+1}\right)=0$

Nếu $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{b+1}\neq 0$ thì phương trình có nghiệm x = b.

Nếu $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{b+1}=0$ thì phương trình có nghiệm $\forall x\in R$.

b) $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3\ (a,b,c\neq 0)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)+\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-b-c-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

– Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$ thì $x=a+b+c$

– Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì x tùy ý ∈ R.

4. a) $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\ (a\neq 0,b\neq 0)$

ĐKXĐ : $x\neq -(a+b)$; $a\neq 0, b\neq 0, x\neq 0$

$a.b.x=b.x(x+a+b)+a.x(x+a+b)+a.b(x+a+b)$

$\Leftrightarrow(a+b)x^2+(a+b)^2x+a.b(a+b)=0$

$\Leftrightarrow(a+b)[x^2+(a+b)x+a.b]=0\Leftrightarrow(a+b)(x+a)(x+b)=0$

* Nếu: $a+b=0$ thì phương trình nghiệm đúng với $\forall x\neq 0$

* Nếu: $a+b\neq 0$ thì $x=-a$ và $x=-b$, vì $a\neq 0$, $b\neq 0$, nên $-a\neq 0$ và $-b\neq 0$.

Phương trình có 2 nghiệm $x=-a$ và $x=-b$.

b) $\frac{a}{x-a}+\frac{3a^2-3a+3}{a^2-x^2}=\frac{1}{x+a}$ ĐKXĐ : $x\neq\pm a$

$a(x+a)-3a^2+4a-3=x-a\Leftrightarrow ax+a^2-3a^2+4a-3=x-a$

$\Leftrightarrow(a-1)x=2a^2-5a+3\Leftrightarrow(a-1)x=2(a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right)$

* Nếu: $a=1$ thì phương trình nghiệm đúng $\forall x\neq\pm 1$

* Nếu: $a \neq 1$ thì $x = 2a - 3$. Giá trị $x = 2a - 3$ là nghiệm của phương t
khi $2a - 3 \neq \pm a \Leftrightarrow a \neq 3 ; a \neq 1$.
Tóm tắt * Với $a \neq 1$ và $a \neq 3$ thì phương trình có nghiệm $x = 2a - 3$.
* Với $a = 1$ thì phương trình nghiệm đúng $\forall x \neq \pm 1$
* Với $a = 3$ thì phương trình vô nghiệm.

5. a) $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = -2$.

b) $x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) + 2(x - 1)(x + 1)$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$. Phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

c) $x^3 - 7x = 6 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x - 3) = 0$
Phương trình có 3 nghiệm $x = -1$; $x = -2$ và $x = 3$.

d) $x^4 + x^3 + 6x^2 = -5(x + 1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 5) = 0$ vô nghiệm.

6. a) $|x - 1| + |2 - x| = 2x$

x	$-\infty$		1		2		-
$\lvert x - 1\rvert$		$-x + 1$	0	$x - 1$	1	$x - 1$	
$\lvert 2 - x\rvert$		$2 - x$	1	$2 - x$	0	$x - 2$	
$\lvert x + 1\rvert + \lvert 2 - x\rvert$		$3 - 2x$	1	1	1	$2x - 3$	

* Trên $(-\infty ; 1)$, có phương trình

$$3 - 2x = 2x \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ (thích hợp)}$$

* Trên $[1; 2]$, có phương trình $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (không thích hợp). $x =$
không phải là nghiệm.
* Trên $(2; +\infty)$, có phương trình $2x - 3 = 2x \Leftrightarrow 0x = 3$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{3}{4}$.

b) $|1 - x| - |x - 2| - |x - 3| = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		1		2		3	-
$\lvert 1 - x\rvert$		$1 - x$	0	$x - 1$		$x - 1$		$x -$
$\lvert x - 2\rvert$		$2 - x$		$2 - x$	0	$x - 2$		$x -$
$\lvert x - 3\rvert$		$3 - x$		$3 - x$		$3 - x$	0	$x -$
$\lvert 1 - x\rvert - \lvert x - 2\rvert - \lvert x - 3\rvert$		$x - 4$		$3x - 6$		$x - 2$		$-x +$
			3		2		3	

- Trên khoảng $(-\infty; 1)$, có phương trình $x - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4\frac{1}{2}$

(không thích hợp)

* Trên $(1; 2)$, có phương trình $3x - 6 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 6\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$ (không thích hợp).

* Trên $(2 ; 3)$, có phương trình $x - 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\frac{1}{2}$ (thích hợp)

* Trên $(3; +\infty)$, có phương trình $-x + 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3\frac{1}{2}$ (thích hợp).

* $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ không phải là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 2\frac{1}{2}$ và $x = 3\frac{1}{2}$.

7. a) $x + \sqrt{x-1} = 2$ (1). Điều kiện xác định $\forall x \geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1})^2 = (2-x)^2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 - 4x + x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 5 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x \leq 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}38 > 1 \end{cases}$$

Phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

b) $\sqrt{25x^2 - 25} + 5x = 2$. Điều kiện xác định $|x| \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 25 = (2-5x)^2 \\ 2 - 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 25 = 4 - 20x + 25x^2 \\ x \leq \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{29}{20} \\ x \leq \dfrac{2}{5} \end{cases}$$ Vô nghiệm. Vậy phương trình vô nghiệm.

8. a) Vì $x = \frac{-3}{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m + 1 = 0$ (1)

nên $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - m.\left(-\frac{3}{2}\right) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}m + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{10}$.

Thay $m = -\frac{13}{10}$ vào (1). Ta có phương trình

$$x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{13}{10} - 1 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 + 13x - 3 = 0$$

$\Delta = 289$; $\sqrt{\Delta} = 17$; $x_1 = \frac{-13+17}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{-13-17}{20} = \frac{-3}{2}$.

Vậy với $m = -\frac{13}{10}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{1}{5} \text{ và } x_2 = -\frac{3}{2}.$$

b) Vì x = 1 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 3m^2x + m = 0$ (*)

thì $3m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1;\ m = -\frac{2}{3}$

– Với m = 1, phương trình (*) trở thành :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2}$$

– Với $m = -\frac{2}{3}$, phương trình (*) trở thành :

$$2x^2 - 3.\frac{4}{9}x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

9. a) $2x^2 + 12x - 15m = 0$

$\Delta' = 36 + 30m$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 36 + 30m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{6}{5}$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 36 + 30m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{6}{5}$: phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -3$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 36 + 30m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{6}{5}$: phương trình có 2 nghiệm :

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 + 30m}}{2};\ x_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 + 30m}}{2}$$

b) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$

$\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = -2m + 1$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow -2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$: phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$: phương trình có nghiệm kép :

$x_1 = x_2 = m - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$: phương trình có 2 nghiệm :

$$x_{1,2} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{1 - 2m}}{1} = m - 1 \pm \sqrt{1 - 2m}\ .$$

10. Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1) có $\Delta_1 = a^2 - 4b$

Phương trình $x^2 + px + q = 0$ (2) có $\Delta_2 = p^2 - 4q$.

$$\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + p^2 - 4(b + q) \qquad (*)$$

mà $ap \geq 2(b + q) \Leftrightarrow 2ap \geq 4(b + q) \Leftrightarrow -2ap \leq -4(b + q)$

$\Leftrightarrow a^2 + p^2 - 2ap \leq a^2 + p^2 - 4(b + q)$

$\Leftrightarrow 0 \leq (a - p)^2 \leq a^2 + p^2 - 4(b + q) \qquad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0 \Rightarrow$ ít nhất một trong hai số Δ_1 , Δ_2 không âm $\Rightarrow$ ít nhất 1 trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

11. $f(x) = x^2 + px + q = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_f = p^2 - 4q < 0$

$g(x) = x^2 + p_1x + q_1 = 0$ vô nghiệm ; $\Delta_g = p_1^2 - 4q_1 < 0$

$f(x) + g(x) = 2x^2 + (p + p_1)x + (q + q_1) = 0$

có $\Delta = (p + p_1)^2 - 8(q + q_1) = (p + p_1)^2 - 2(p^2 - \Delta_f + p_1^2 - \Delta_g)$

$= p_1^2 + 2p_1p + p^2 - 2p^2 + 2\Delta_f - 2p_1^2 + 2\Delta_g$

$= 2(\Delta_f + \Delta_g) - p^2 + 2pp_1 - p_1^2 = 2(\Delta_f + \Delta_g) - (p - p_1)^2 < 0$

Vậy phương trình $f(x) + g(x) = 0$ vô nghiệm.

12. $x^2 - 2(m - 2)x + m(m - 3) = 0$

$\Delta' = (m - 2)^2 - m(m - 3) = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m = 4 - m$

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Với $m \leq 4$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 :

$x_1 + x_2 = 2(m - 2)$; $x_1 . x_2 = m(m - 3)$

$x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 0$

$\Leftrightarrow 2(m - 2)[4(m - 2)^2 - 3m(m - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow 2(m - 2)(4m^2 - 16m + 16 - 3m^2 + 9m) = 0$

$\Leftrightarrow 2(m - 2)(m^2 - 7m + 16) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn điều kiện $m \leq 4$)

Vậy nếu $m = 2$ thì phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

13. $x^2 + (m - 1)x - m = 0$ có $\Delta = (m - 1)^2 + 4m = m^2 - 2m + 1 + 4m$

$$= m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 \geq 0\ \forall m.$$

Phương trình luôn có nghiệm với $\forall m$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1x_2 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ -x_1x_2 = m \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$ không phụ thuộc vào m.

14. a) Phương trình $2x^2 - 4(m + 1)x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $ac < 0$ $\Leftrightarrow 2(m - 2) < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

b) Phương trình $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $ac < 0 \Leftrightarrow (m + 2)(m - 2) < 0 \Leftrightarrow 2- < m < 2$.

15. Phương trình $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi $m + 1 \neq 0$ và:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+4)^2 - (m+1)^2 > 0 \\ \dfrac{m+1}{m+1} > 0 \\ \dfrac{-2(m+4)}{m+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+4+m+1)(m+4-m-1) > 0 \\ 1 > 0 \\ \dfrac{(m+4)}{m+1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m+4>0 \\ m+1>0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m+4<0 \\ m+1<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

16. a) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > -1 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

b) Với $-1 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm dương x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m + 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 5 \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{m+1} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m + 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4} \in (-1\ ;\ 3).$$

17. Coi phương trình $yx^2 - 4x + y - 3 = 0$ (*) là phương trình bậc hai, ẩn là x ; y là tham số.

$\Delta' = 4 - y(y - 3) = 4 - y^2 + 3y = -y^2 + 3y + 4$

$= -y^2 + 4y - y + 4 = y(4 - y) + (4 - y) = (4 - y)(y + 1)$

Tồn tại cặp số (x, y) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (4 - y)(y + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4$

GTLN của y = 4. Khi đó $\Delta' = 0$ nên $x = \frac{-b'}{a} = \frac{2}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

GTNN của y = –1. Khi đó $\Delta' = 0$ nên $x = \frac{-b'}{a} = \frac{2}{y} = \frac{2}{-1} = -2$.

18. a) $x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$

* $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

* $x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm.

b) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 1) + 5(x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5)(x^2 + x + 1) = 0$: vô nghiệm.

c) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$. Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$, có phương trình

$t^2 + 7t - 8 = 0$ có 2 nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = -8$ (loại)

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

d) $x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 20x + 16 = 0$ (*)

Thay x = 0 vào vế trái thì vế trái bằng $16 \neq 0$. Vậy x = 0 không phải là nghiệm của (*).

Với $x \neq 0$, chia 2 vế của (*) cho x^2 được phương trình :

$$x^2 - 5x + 12 - \frac{20}{x} + \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{4}{x}\right) + 12 = 0$$

Đặt $x + \frac{4}{x} = t$ thì $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = t^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} + 8 = t^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 - 8$.

Ta có phương trình : $t^2 - 8 - 5t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = 1$ và $t_2 = 4$.

* Với $t_1 = 1$ thì $x + \frac{4}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$: vô nghiệm

* Với $t_2 = 4$ thì $x + \frac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm $x_1 = x_2 = 2$.

19. a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$; ĐKXĐ : $x \geq -3$

$(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8})^2=5^2 \Leftrightarrow x+3+x+8+2\sqrt{(x+3)(x+8)}=25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x+8)}=14-2x \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+8)}=7-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+11x+24=49-14x+x^2 \\ 7-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x=25 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (chấp nhận vì thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm x = 1.

b) $x^2-2x-7+3\sqrt{(x+1)(x-3)}=0$

ĐKXĐ : $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$

$x^2-2x-7+3\sqrt{x^2-2x-3}=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3-4+3\sqrt{x^2-2x-3}=0$

Đặt $\sqrt{x^2-2x-3}=t$ $(t \geq 0)$ ta có phương trình : $t^2+3t-4=0$

$t_1=1$; $t_2=-4$ (loại)

Với t = 1 ta có $\sqrt{x^2-2x-3}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=1 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$

$\Delta'=5$; $x_1=1+\sqrt{5}$, $x_2=1-\sqrt{5}$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$.

20. Phương trình $x^2+bx+c=0$ (1) có $\Delta_1=b^2-4c$

Phương trình $x^2+cx+b=0$ (2) có $\Delta_2=c^2-4b$

$$\Delta_1+\Delta_2=b^2+c^2-4(b+c) \qquad (*)$$

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2(b+c)=bc \Leftrightarrow 4(b+c)=2bc$. Thay vào (*) :

$\Delta_1+\Delta_2=b^2+c^2-2bc=(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ít nhất một trong hai số Δ_1, Δ_2 không âm $\Rightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

21. Giả sử phương trình $x^2+px+q=0$ có hai nghiệm dương x_1 và x_2 Theo định lí Viet : $\begin{cases} S=x_1+x_2=-p \ (p<0) \\ P=x_1.x_2=q \ (q>0) \end{cases}$

Gọi nghiệm của phương trình phải tìm là y_1 và y_2 thì :

$$\begin{cases} S'=y_1+y_2=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \\ P'=y_1.y_2=\sqrt{x_1x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S'^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2} \\ P'^2=x_1x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S'^2 = -p + 2\sqrt{q} \\ P'^2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S' = \sqrt{-p + 2\sqrt{q}} & (\text{vì } S' > 0) \\ P' = \sqrt{q} & (\text{vì } P' > 0) \end{cases}$$

Vậy phương trình phải tìm là $y^2 - \sqrt{-p + 2\sqrt{q}}\, y + \sqrt{q} = 0$.

22. $|x - 1|(x + 2) + m = 0$

- Với $x \geq 1$ thì ta có phương trình

$(x - 1)(x + 2) + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + m = 0$

$\Delta = 1 - 4(m - 2) = 9 - 4m$

Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 9 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ thì phương trình trở thành

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} < 1 \text{ (loại).}$$

Phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$ thì $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9 - 4m}}{2} < 0$ (loại)

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4m}}{2}$.

$x = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4m}}{2}$ là nghiệm khi $\frac{-1 + \sqrt{9 - 4m}}{2} \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{9 - 4m} \geq 3 \Leftrightarrow 9 - 4m \geq 9 \Leftrightarrow m \leq 0$

Vậy : $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4m}}{2}$

$m \geq \frac{9}{4}$ thì phương trình vô nghiệm

- Với $x < 1$ thì phương trình $(1 - x)(x + 2) + m = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 - m = 0$; $\Delta = 9 + 4m$:

* $\Delta < 0 \Rightarrow 9 + 4m < 0 \Rightarrow m < -\frac{9}{4}$: phương trình vô nghiệm

* $\Delta \geq 0$ $m \geq -\frac{9}{4}$ thì $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9 + 4m}}{2} < 1$ chấp nhận

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 + 4m}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{9 + 4m} < 3$

$\Leftrightarrow 0 \leq 9 + 4m < 9 \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \leq m < 0$

Vậy : * $m < -\frac{9}{4}$ vô nghiệm.

* $-\frac{9}{4} \le m < 0$: 2 nghiệm $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+4m}}{2}$

* $m > 0$: 1 nghiệm : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9+4m}}{2}$

Tom tắt :

- Nếu $m < -\frac{9}{4}$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-\frac{9}{4} \le m < 0$ thì phương trình có 3 nghiệm :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9-4m}}{2};\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{9-4m}}{2};\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{9+4m}}{2}$$

- Nếu $m = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -2$.
- Nếu $m > 0$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{-1-\sqrt{9+4m}}{2}$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng : $ax + by = c$, trong đó x, y là ẩn ; a, b, c là các số thực đã cho và a, b không đồng thời bằng 0.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

trong đó cả hai phương trình đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Cách giải: Có ba phương pháp giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

a) *Phương pháp thế.* Từ một trong hai phương trình của hệ biểu thị một ẩn qua ẩn kia rồi thay vào phương trình còn lại.

b) *Phương pháp cộng.* Biến đổi cho hệ số của một ẩn bằng nhau về giá trị tuyệt đối, rồi cộng vế với vế của hai phương trình lại nếu hai hệ số đó khác dấu; trừ vế với vế nếu hai hệ số đó cùng dấu.

c) *Dùng định thức cấp 2.* Chẳng hạn với hệ phương trình (1)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \; ; \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Nếu $D \neq 0$ thì nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

3. Dạng tam giác của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2) \text{ hoặc } \begin{cases} a_1x = d \\ a_2x + b_2y = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (3)$$

Cách giải

Đối với hệ (2) ta tính từ cuối lên, trước hết tìm z rồi thay vào phương trình hai tìm y, thay y và z vào phương trình thứ nhất tìm x. Đối với hệ (3) thì làm ngược lại, tìm x, sau đó tìm y và cuối cùng tìm z.

4. *Hệ ba phương bậc nhất ba ẩn* có dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ (4)

Cách giải

1) Có thể dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng để khử dần các ẩn số để đưa về dạng tam giác

2) Dùng định thức cấp 3 : Chẳng hạn hệ (4) :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Nếu $D \neq 0$ thì nghiệm của hệ phương trình (4) là : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $2x - 3y = 7$; b) $4x + 5y = 0$

Giải. a) $2x - 3y = 7 \Leftrightarrow y = \dfrac{2x-7}{3}$.

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \\ y = \dfrac{2x-7}{3} \end{cases}$

Hoặc $2x - 3y = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{3y+7}{2}$

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{3y+7}{2} \\ y \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \end{cases}$

b) $4x + 5y = 0$

$4x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5y}{4}$

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{-5y}{4} \\ y \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \end{cases}$

Hoặc : $4x + 5y = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4x}{5}$

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-4x}{5} \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho phương trình $(m^2 - 1)x + (m + 1)y = 2m$

a) Xác định m để phương trình vô nghiệm

b) Giải phương trình khi $m = 1$

c) Giải phương trình khi $m = 0$

Giải. a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \\ 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy nếu $m = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $m = 1$ thì phương trình trở thành : $0x + 2y = 2$

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \\ y = 1 \end{cases}$

c) Nếu m = 0 thì phương trình trở thành : $-x + y = 0 \Leftrightarrow y = x$

Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R} \\ y = x \end{cases}$

Hoặc phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = y \\ y \text{ tùy ý thuộc } \mathbb{R}. \end{cases}$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} y = 11 - 2x & (1) \\ 5x - 4y = 8 & (2) \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x = y + 1 & (1) \\ 6x - 2y = 5 & (2). \end{cases}$

Giải. a) Phương pháp thế

Thay (1) vào (2) ta có : $5x - 4(11 - 2x) = 8 \Leftrightarrow 13x = 52 \Leftrightarrow x = 4$

Từ đó suy ra $y = 11 - 2.4 = 3$

Vậy nghiệm của hệ là (4; 3)

Phương pháp cộng

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 8x + 4y = 44 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 13x = 52 \Rightarrow x = 4 \quad}$$

suy ra $8 + y = 11 \Rightarrow y = 3$

Vậy nghiệm của hệ là (4 ; 3)

Phương pháp dùng định thức cấp hai

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -13 \text{ ; } D_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -52 \text{ ; } D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -39$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-52}{-13} = 4 \\ y = \dfrac{-39}{-13} = 3 \end{cases}$$

b) Từ (1) ta có $y = 3x - 1$. Thay vào phương trình (2) ta được :

$$6x - 2(3x - 1) = 5 \Leftrightarrow 0x + 2 = 5.$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 1 & (1) \\ 2x - y + 2z = 5 & (2) \\ x - 2y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Giải

a) *Đưa về dạng tam giác*

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 và nhân hai vế của phương trình (2) với -3, rồi cộng vế với vế của hai phương trình này, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 & (1) \\ 5y - 8z = -13 & (2)' \\ x - 2y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình (3) với −3, rồi cộng với phương trình (1), được hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 & (1) \\ 5y - 8z = -13 & (2)' \\ 7y + 8z = 1 & (3)' \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2)' với −7 và nhân 2 vế của (3)' với 5, rồi cộng hai phươ trình này, ta được hệ phương trình tam giác :

$$\begin{cases} 3x + y - \;\; z = 1 \\ \quad\;\; 5y - 8z = -13 \\ \qquad\quad\; 96z = 96 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối ta được z = 1 thay vào phương trình thứ hai ta đư y = −1. Thay z = 1 và y = −1 vào phương trình đầu ta được x = 1. Vậy nghiệm của hệ là (x; y; z) = (1; −1; 1)

b) $$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 & (4) \end{cases}$$

Cộng 4 phương trình trên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 & (2)' \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 & (4) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2)' ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 & (2)' \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 3 & (1)' \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 & (4) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (3) với −1 rồi cộng với (4) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \;\; x_4 = 5 & (2)' \\ \qquad x_2 + x_3 + \;\; x_4 = 3 & (1)' \\ \qquad\qquad 2x_3 - 2x_4 = 1 & (3)' \\ x_1 + x_2 + x_3 - \;\; x_4 = 4 & (4) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (4) với (−1) rồi cộng với (2)' ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \;\; x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 + \;\; x_4 = 3 \\ \qquad\qquad 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối ta được $x_4 = \frac{1}{2}$. Thay giá trị này vào phương trình thứ ba ta được $x_3 = 1$. Thay $x_4 = \frac{1}{2}$ và $x_3 = 1$ vào phương trình thứ hai ta được $x_2 = \frac{3}{2}$. Thay $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ vào phương trình thứ nhất ta được $x_1 = 2$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (2; \frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2})$

Chú ý: Ta cũng có thể giải phương trình bằng cách sau :

Cộng (1), (2), (3), (4) ta được phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ (2)'

Lấy (2)' trừ đi (1) được $2x_1 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$.

Lấy (2)' trừ đi (2) được $2x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

Lấy (2)' trừ đi (3) được $2x_3 = 2 \Leftrightarrow x_3 = 1$

Lấy (2)' trừ đi (4) được $2x_4 = 1 \Leftrightarrow x_4 = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3y = -m \\ 3x + my = 8 \end{cases}$

Giải. $D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 - 9 = (m-3)(m+3)$

$D_x = \begin{vmatrix} -m & 3 \\ 8 & m \end{vmatrix} = -m^2 - 24$; $\qquad D_y = \begin{vmatrix} m & -m \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8m + 3m = 11m$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$

Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{-m^2 - 24}{m^2 - 9} \\ y = \dfrac{11m}{m^2 - 9} \end{cases}$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

* nếu m = 3, hệ trở thành : $\begin{cases} 3x + 3y = -3 \\ 3x + 3y = 8 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

* nếu m = −3, hệ trở thành $\begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Chú ý:

Nếu $D = 0$ mà $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm

Nếu $D = 0$ mà $D_x = 0$ và $D_y = 0$ thì hệ phương trình vô số nghiệm.

Ví dụ 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m + 1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình.

b) Xác định $m \in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là nghiệm nguy

Giải

a) $D = \begin{vmatrix} m + 1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = -m - 1 + 2m^2 = (2m + 1)(m - 1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m - 1 & -2 \\ m^2 + 2m & -1 \end{vmatrix} = -m + 1 + 2m^2 + 4m = 2m^2 + 3m + 1$$

$$= (2m + 1)(m + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m + 1 & m - 1 \\ m^2 & m^2 + 2m \end{vmatrix} = m^3 + 2m^2 + m^2 + 2m - m^3 + m^2 =$$

$$= 4m^2 + 2m = 2m(2m + 1)$$

* Hệ phương trình có 1 nghiệm khi $D \neq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)(m - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(2m + 1)(m + 1)}{(2m + 1)(m - 1)} = \dfrac{m + 1}{m - 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2m(2m + 1)}{(2m + 1)(m - 1)} = \dfrac{2m}{m - 1} \end{cases}$$

- Với m = 1, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

nên hệ vô nghiệm (Hệ vô nghiệm vì $D = 0$ và $D_x = 6 \neq 0$)

* Với $m = -\dfrac{1}{2}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 2y = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4}x - y = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = -3 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$ nên hệ vô số nghiệm.

(Vô số nghiệm vì $D = D_x = D_y = 0$)

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 4y - 3 \\ y \text{ tùy ý trong } \mathbb{R} \end{cases}$

b) * Với $m \neq 1$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{m+1}{m-1} \\ y = \dfrac{2m}{m-1} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ khi : $\begin{cases} \dfrac{m+1}{m-1} = \dfrac{m-1+2}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2m}{m-1} = \dfrac{2m-2+2}{m-1} = 2 + \dfrac{2}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow m - 1$ là ước của 2:

$m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$: hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

$m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$: hệ phương trình có nghiệm : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$: hệ phương trình có nghiệm : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$m - 1 = -2 \Leftrightarrow m = -1$; hệ phương trình có nghiệm : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy nếu $m = 2; 0; 3; -1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Ví dụ 7. Xác định tham số m để hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + (1+m)y = 0 & (1) \\ (1-m)x + my = 1 + m & (2) \\ (1+m)x + (12-m)y = -(1+m) & (3) \end{cases}$$

Giải. Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} x + (1+m)y = 0 & (1) \\ (1-m)x + my = 1 + m & (2) \end{cases}$ (I)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1+m \\ 1-m & m \end{vmatrix} = m - 1 + m^2 = m^2 + m - 1$$

Hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất khi $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$m \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1+m \\ 1+m & m \end{vmatrix} = -(m+1)^2 \ ; \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-m & 1+m \end{vmatrix} = 1+m$$

Vậy hệ (I) có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{-(m+1)^2}{m^2+m-1} \\ y = \dfrac{m+1}{m^2+m-1} \end{cases}$

Thay giá trị của x, y vào (3) : $(1+m)x + (12-m)y = -(1+m)$

$$\frac{-(m+1)^3}{m^2+m-1} + \frac{(12-m)(m+1)}{m^2+m-1} = -(m+1)$$

với điều kiện $m \neq \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$

$\Leftrightarrow -(1+m)^3 + (12-m)(m+1) + (m+1)(m^2+m-1) = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(-2m+10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Với $m = -1$ thì hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Với $m = 5$ thì hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{-36}{29} \\ y = \dfrac{6}{29} \end{cases}$

Vậy với $m = -1$, $m = 5$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

III. BÀI TẬP

1. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7 \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$

2. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$

3. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - 4y + z = -5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - y + z = 3 \end{cases}$

4. Xác định a để hệ phương trình sau có 1 nghiệm duy nhất :

a) $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ ax - 5y = 3 \end{cases}$;

5. Xác định m để hệ phương trình sau vô nghiệm; vô số nghiệm.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = m + 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = m - 1 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

Xác định m để hệ phương trình có một nghiệm (x, y) thoả mãn

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$$

7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 6mx + (2 - m)y = 3 \\ (m - 1)x - my = 2 \end{cases}$

a) Giải và biện luận.

b) Giả sử (x; y) là nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức giữa x và y độc lập đối với m.

8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m + 1)y = 4m \end{cases}$

a) Giải và biện luận.

b) Xác định m $\in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

9. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = a \\ (2a - b)x + (2a + b)y = b \end{cases}$$

10. Xác định a, b để hệ phương trình

a) $\begin{cases} ax + y = b \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ có một nghiệm.

b) $\begin{cases} y - ax = b \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ vô nghiệm.

c) $\begin{cases} ax + y = a + b \\ x + 2y = a \end{cases}$ có vô số nghiệm.

11. Số a bằng 80% số b, số c bằng 140% số b. Tìm ba số a, b, c. Biết rằng số c lớn hơn số a là 72.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$ **ĐKXĐ** $x \neq 5$; $y \neq -2$

Đặt $\dfrac{1}{x-5} = u$; $\dfrac{1}{y+2} = v$ ta có:

$$\begin{cases} 10u + v = 1 \\ 25u + 3v = 2 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 25 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 25 = 5$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \; ; \; D_v = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 25 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 25 = -5$$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{1}{5}; \; v = \frac{D_v}{D} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{y+2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 5 \\ y + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -3 \end{cases} \text{(thích hợp)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 10 \\ y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7 \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$ **ĐKXĐ** : $x \neq \dfrac{y}{2}$; $x \neq -3y$

Đặt $\dfrac{1}{2x-y} = u$; $\dfrac{1}{x+3y} = v$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 27u + 32v = 7 \\ 45u - 48v = -1 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 27 & 32 \\ 45 & -48 \end{vmatrix} = -1296 - 1440 = -2736$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 7 & 32 \\ -1 & -48 \end{vmatrix} = -336 + 32 = -304$$

$$D_v = \begin{vmatrix} 27 & 7 \\ 45 & -1 \end{vmatrix} = -27 - 315 = -342$$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{-304}{-2736} = \frac{1}{9}; \; v = \frac{D_v}{D} = \frac{-342}{-2736} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{x+3y} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 9 \quad (1) \\ x + 3y = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y = 2x - 9$ (*)

Thay vào phương trình (2) ta có phương trình

$x + 3(2x - 9) = 8 \Leftrightarrow 7x = 27 + 8 \Leftrightarrow 7x = 35 \Leftrightarrow x = 5$ thay $x = 5$ vào (*) ta tìm được : $y = 10 - 9 = 1$

$x = 5$, $y = 1$ thoả mãn ĐKXĐ.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1. \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} 2\,|x - 6| + 3\,|y + 1| = 5 \\ 5\,|x - 6| - 4\,|y + 1| = 1 \end{cases}$

Đặt. $u = |x - 6|$; $v = |y + 1|$ ta có :

$$\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 3 = -23 \; ; \; D_v = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 25 = -23$$

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{-23}{-23} = 1; \; v = \frac{D_v}{D} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$\begin{cases} |x - 6| = 1 \\ |y + 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 6 = 1 \\ x - 6 = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y + 1 = 1 \\ y + 1 = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4\,|x + y| + 3\,|x - y| = 8 \\ 3\,|x + y| - 5\,|x - y| = 6 \end{cases}$ làm tương tự như a), ta tìm được :

Hệ phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 & (1) \\ 3x - 4y + z = -5 & (2) \\ 2x + y + 3z = 4 & (3) \end{cases}$

Cộng (1) với (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 & (1) \\ 4x - 2y = 0 & (2)' \\ 2x + y + 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -3 rồi cộng với (3) ta có hệ :

$$\begin{cases} -x - 5y = -11 & (1)' \\ 4x - 2y = 0 & (2)' \\ 2x + y + 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1') với -2 và nhân vế với vế của (2') với 5 rồi cộng chúng với nhau ta được hệ :

$$\begin{cases} 22x = 22 \\ 4x - 2y = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được $x = 1$. Thay $x = 1$ vào phương trình thứ 2 ta được $y = 2$, thay $x = 1$, $y = 2$ vào phương trình cuối ta được $z = 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1;\ 2;\ 0)$

b) $$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 & (1) \\ x + 3y + 2z = 2 & (2) \\ 5x - y + z = 3 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2) với -3 rồi cộng với (1) ta được hệ :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 & (1) \\ -7y - 10z = 3 & (2)' \\ 5x - y + z = 3 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -5 và nhân hai vế của (3) với 3 rồi cộng chúng lại ta được hệ :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 & (1) \\ -7y - 10z = 3 & (2)' \\ -13y + 23z = -36 & (3)' \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2') với -13 và nhân hai vế của (3') với 7 rồi cộng chúng lại, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 \\ -7y - 10z = 3 \\ 291z = -291 \end{cases}$$

Giải phương trình cuối ta được $z = -1$. Thay $z = -1$ vào phương trình thứ 2 ta được $y = 1$. Thay $z = -1$, $y = 1$ vào phương trình đầu ta được $x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1;\ 1;\ -1)$.

4. a) $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a - 6$

Hệ phương trình có 1 nghiệm khi $D \neq 0 \Leftrightarrow a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6$.

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ ax - 5y = 3 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & -5 \end{vmatrix} = -10 + 3a$

Hệ phương trình có 1 nghiệm khi $D \neq 0 \Leftrightarrow -10 + 3a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{10}{3}$.

5. a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = m + 1 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0;$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m + 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + m + 1 = m - 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & m + 1 \end{vmatrix} = m + 1 - 4 = m - 3$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} \forall m \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 3$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = m - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3.$$

b) $\begin{cases} 2x + y = m - 1 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} m - 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 5 = 2m - 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & m - 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4m + 4 = 14 - 4m$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq \dfrac{7}{2}$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{7}{2}$.

6. $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3 > 0 \forall m$

Hệ phương trình có 1 nghiệm : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & m \end{vmatrix}}{m^2 + 3} = \dfrac{2m + 5}{m^2 + 3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{m^2 + 3} = \dfrac{5m - 6}{m^2 + 3} \end{cases}$

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2+3} \Leftrightarrow \frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} = \frac{3}{m^2+3}$$

$$\Leftrightarrow 7m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{7}.$$

7. $\begin{cases} 6mx + (2-m)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} 6m & 2-m \\ m-1 & -m \end{vmatrix} =$

$$= -6m^2 - (m-1)(2-m) = -6m^2 - 2m + m^2 + 2 - m$$

$$= -5m^2 - 3m + 2 = (m+1)(2-5m)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2-m \\ 2 & -m \end{vmatrix} = -3m - 4 + 2m = -(m+4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6m & 3 \\ m-1 & 2 \end{vmatrix} = 12m - 3m + 3 = 9m + 3$$

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(2-5m) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq -1 \\ m \neq \frac{2}{5} \end{array}\right.$ thì hệ phương trình có 1

nghiệm : $\begin{cases} x = \dfrac{-(m+4)}{(m+1)(2-5m)} \\ y = \dfrac{9m+3}{(m+1)(2-5m)} \end{cases}$

– Nếu m = –1 thì hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} -6x + 3y = 3 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{array}{c} D = 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \neq 0 \end{array}$

Hệ phương trình vô nghiệm.

– Nếu $m = \frac{2}{5}$ thì hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} \frac{12}{5}x + \frac{8}{5}y = 3 \\ -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{array}{c} D = 0 \\ D_x = \begin{vmatrix} \frac{12}{5} & 3 \\ -\frac{3}{5} & 2 \end{vmatrix} = \frac{24}{5} + \frac{9}{9} \neq 0 \end{array}$

Hệ phương trình vô nghiệm.

b) Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình ($x \neq 0$), ta có :

$$\begin{cases} 6mx + (2-m)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6mx + 2y - my = 3 \\ mx - x - my = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6x - y)m = 3 - 2y \text{ nhân hai vế với } (x - y) \\ -(x - y)m = 2 + x \text{ nhân hai vế với } (6x - y),\ (y \neq 6x) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} (x - y)(6x - y)m = (3 - 2y)(x - y) \\ -(x - y)(6x - y)m = (2 + x)(6x - y) \end{cases}$$

$$\overline{\quad 0 \qquad = (3 - 2y)(x - y) + (2 + x)(6x - y) \quad}$$

$\Leftrightarrow 3x - 3y - 2xy + 2y^2 + 12x - 2y + 6x^2 - xy = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 2y^2 - 3xy + 15x - 5y = 0$ không phụ thuộc vào m.

8. a) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m + 1)y = 4m \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 4(m+1) \end{vmatrix} = 4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4m & 4(m+1) \end{vmatrix} = 4m + 4 + 4m = 8m + 4 = 4(2m + 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 4m \end{vmatrix} = 4m^2 - 1 = (2m + 1)(2m - 1)$$

– Nếu $m \neq -\frac{1}{2}$ thì $D = (2m + 1)^2 \neq 0$ hệ phương trình có 1 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{4(2m+1)}{(2m+1)^2} = \dfrac{4}{2m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(2m+1)(2m-1)}{(2m+1)^2} = \dfrac{2m-1}{2m+1} \end{cases}$$

– Nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x = -2y - 2 \\ y \text{ tuỳ ý } \in R \end{cases}$

b) Nếu $m \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ phương trình có 1 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{2m+1} \\ y = \dfrac{2m-1}{2m+1} = \dfrac{2m+1-2}{2m+1} = 1 - \dfrac{2}{2m+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{2m+1} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{2m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $2m + 1$ là ước của 2, mà $2m + 1$ lẻ nên $2m + 1 = \pm 1$

* $2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$, hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$

* $2m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$, hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy nếu $m = 0$; $m = -1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

9. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a-b)x + (2a+b)y = b \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 2a^2 + 3ab + b^2 - 2a^2 + 3ab - b^2 = 6ab$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & a-b \\ b & 2a+b \end{vmatrix} = 2a^2 + ab - ab + b^2 = 2a^2 + b^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+b & a \\ 2a-b & b \end{vmatrix} = ab + b^2 - 2a^2 + ab = b^2 + 2ab - 2a^2$$

– Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì $D \neq 0$, hệ phương trình có 1 nghiệm

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2a^2 + b^2}{6ab} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{b^2 + 2ab - 2a^2}{6ab} \end{cases}$$

– Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} bx - by = 0 \\ -bx + by = b \end{cases} \quad D_x = \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & b \end{vmatrix} = b^2 \neq 0$$

Hệ phương trình vô nghiệm

– Nếu $a \neq 0$, $b = 0$ thì hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} ax + ay = a \\ 2ax + 2ay = 0 \end{cases} \quad D_x = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 \neq 0$$

Hệ phương trình vô nghiệm

– Nếu $a = b = 0$ thì hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$ Vô số nghiệm.

10. a) $\begin{cases} ax + y = b \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 3$$

Hệ phương trình có 1 nghiệm khi $D \neq 0 \Leftrightarrow 2a - 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$

$D_x = \begin{vmatrix} b & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2b + 5$; $D_y = \begin{vmatrix} a & b \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5a - 3b$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2b + 5}{2a - 3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-(5a + 3b)}{2a - 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - ax = b \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax + y = b \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm khi $D = 0$ và $D_x \neq 0$ (hoặc $D_y \neq 0$)

$$D = \begin{vmatrix} -a & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3b - 4 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \frac{-4}{3}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b \neq \dfrac{-4}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y = a + b \\ x + 2y = a \end{cases}$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $D = 0$; $D_x = D_y = 0$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a + b & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2a + 2b - a = a + 2b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a + b \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a - b$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a^2 - a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Với $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{-1}{4}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + y = \dfrac{1}{4} \\ x + 2y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = -2y + \dfrac{1}{2} \\ y \text{ tuỳ ý thuộc } \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \text{ tuỳ ý thuộc } \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}x \end{cases}$

11. Gọi ba số a, b, c lần lượt là x, y, z

Số a bằng 80% số b, nên ta có phương trình :

$$x = \frac{80}{100}y \Leftrightarrow 10x = 8y$$

số c bằng 140% số b, nên ta có phương trình :

$$z = \frac{140}{100}y \Leftrightarrow 10z = 14y$$

Số c lớn hơn số a là 72, nên ta có phương trình : $z - x = 72$

Như vậy ta có hệ phương trình sau : $\begin{cases} 10x - 8y = 0 \\ 10z - 14y = 0 \\ z - x = 72 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được (x; y; z) = (96; 120; 168)

Vậy ba số phải tìm a, b, c lần lượt là 96, 120, 168.

ÔN CHƯƠNG III

1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau rồi giải các phương trình

a) $3x + \dfrac{5}{x - 4} = 12 + \dfrac{5}{x - 4}$; b) $5x + \dfrac{1}{x + 3} = 15 + \dfrac{1}{x + 3}$.

2. Tìm điều kiện xác định của phương trình sau rồi giải các phương trình ấ

a) $1 + \sqrt{1 - x} = \sqrt{x - 2}$; b) $\sqrt{x + 1} = \sqrt{2 - x}$.

3. Các cặp phương trình sau có tương đương không ? Nếu không thì cần t
điều kiện gì để hai phương trình tương đương ?

a) $2x + \dfrac{1}{x - 2} = 6 + \dfrac{1}{x - 2}$ và $2x = 6$ b) $2x - 5 = x$ và $(2x - 5)x = x$

4. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^2 - 4} = 1 - x$ b) $\sqrt{9 - x^2} = x - 3$.

5. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a, b

a) $ax - a^2 = 2x - 4$; c) $a(x - 1) = x + b$

b) $-9x - 27 = a^3 - a^2x$; d) $a(2x - 3) = x + b$.

6. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} y = 11 - 2x \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x = y + 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 18 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{10}{x - 1} + \dfrac{1}{y + 2} = 1 \\ \dfrac{25}{x - 1} + \dfrac{3}{y + 2} = 2. \end{cases}$

7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\,|x + y| - |x - y| = 9 \\ 3\,|x + y| + 2\,|x - y| = 17. \end{cases}$

8. Giải và biện luận các hệ phương trình với m là tham số :

a) $\begin{cases} mx + 3y = m + 1 \\ 2x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x - (m - 2)y = m \\ mx + (m + 3)y = 2m \end{cases}$

c) $\begin{cases} m^2x + (2 - m)y = m^3 + 4 \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2 \end{cases}$

9. Tìm c và d để hệ phương trình sau : $\begin{cases} (c + 1)^2x - (c + 1)y = -c \\ (d - 1)x + (5 - 2d)y = c + 4 \end{cases}$

có một nghiệm (x; y) = (1; 1).

10. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 7 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 9 \\ -x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ (a, b, c khác nhau và khác 0).

11. Giải và biện luận các phương trình

a) $x^2 = a + 1$; b) $(k - 1)x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $\dfrac{x}{m - 1} = \dfrac{2}{x + 1}$ d) $2kx^2 - 2(\sqrt{2}\,k - 1)x + k = 0$.

12. Biện luận bằng đồ thị số nghiệm của phương trình :

a) $3x^2 - 2x + p = 0$; b) $x^2 - 3|x| + m = 0$.

c) Hãy chỉ ra biểu thức các nghiệm của b).

13. Cho phương trình

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0 \qquad (1)$$

a) Giải phương trình (1) với $a = 3$

b) Với giá trị nào của a thì (1) có vô số nghiệm ?

14. Cho phương trình : $(k - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$

a) Giải và biện luận

b) Tìm k để phương trình có hai nghiệm trái dấu ? Có hai nghiệm cù dương ? Có hai nghiệm cùng âm ? Có tổng các bình phương hai nghiệ bằng 2.

15. Bà em 3 lần đi cửa hàng mua vở, bút chì và tẩy cho chúng em. Lần đầu l mua 1 quyển vở, 1 bút chì và 1 tẩy hết 6000 đ. Lần thứ 2 bà mua 3 bút chì, quyển vở và 1 cái tẩy hết 13.000 đ. Lần thứ 3 bà mua 2 bút chì, 5 quyển v và 3 cái tẩy 22.000 đ. Hỏi giá tiền mỗi loại, biết rằng giá tiền mua m quyển vở, một bút chì, một cái tẩy ba lần không thay đổi.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $3x + \dfrac{5}{x-4} = 12 + \dfrac{5}{x-4}$; **ĐKXĐ** : $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.

Giải phương trình được $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$. không thoả mãn **ĐKXĐ**.

Vậy phương trình vô nghiệm

b) $5x + \dfrac{1}{x+3} = 15 + \dfrac{1}{x+3}$ **ĐKXĐ** $x \neq -3$

Giải phương trình $5x = 15 \Leftrightarrow x = 3 \neq -3$. Vậy $x = 3$ là nghiệm của phươn trình.

2. a) $1 + \sqrt{1 - x} = \sqrt{x - 2}$

$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ (mâu thuẫn)

Điều kiện xác định của phương trình : Không có giá trị nào của x thoả mã

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) $\sqrt{x + 1} = \sqrt{2 - x}$

$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

Vậy điều kiện xác định của phương trình là : $-1 \leq x \leq 2$

Bình phương hai vế của phương trình ta được : $x + 1 = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thoả mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

a) $2x + \frac{1}{x-2} = 6 + \frac{1}{x-2}$ và $2x = 6$

ĐKXĐ của phương trình đầu : $x \neq 2$. ĐKXĐ của phương trình thứ hai : $\forall x \in \mathbb{R}$

Nghiệm của phương trình đầu là $x = 3$. Nghiệm của phương trình thứ hai là $x = 3$. Vậy hai phương trình này tương đương với ĐKXĐ là $x \neq 2$.

b) $2x - 5 = x$ (1) và $(2x - 5)x = x^2$ (2)

ĐKXĐ của hai phương trình này là với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Phương trình (1) có $S_1 = \{5\}$, phương trình (2) có $S_2 = \{0; 5\}$

Vậy hai phương trình này không tương đương.

Muốn (1) và (2) tương đương thì (2) phải thêm điều kiện $x \neq 0$.

a) VT có nghĩa $|x| \geq 2$. VP có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy ĐKXĐ : $|x| \geq 2$

Với ĐKXĐ trên phương trình đã cho tương đương với hệ hỗn hợp :

$$\begin{cases} x^2 - 4 = (1 - x)^2 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

b) ĐKXĐ : $|x| \leq 3$

Phương trình đã cho tương đương với hệ hỗn hợp :

$$\begin{cases} 9 - x^2 = (x - 3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x^2 = x^2 - 6x + 9 & (1) \\ x \geq 3 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) : (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

kết hợp (2) nhận $x = 3$ ($x = 0$ bị loại)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 3$.

5. a) $ax - a^2 = 2x - 4 \Leftrightarrow (a - 2)x = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$

Nếu $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$, phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{(a - 2)(a + 2)}{a - 2} = a + 2$$

Nếu $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Phương trình đã cho đưa về dạng :

$2x - 4 = 2x - 4$, phương trình vô số nghiệm.

b) $-9x-27=a^3-a^2x \Leftrightarrow (a^2-9)x=a^3+27$

- Nếu $a^2-9\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \pm 3$, phương trình có một nghiệm

$$x=\frac{a^3+27}{a^2-9}=\frac{(a+3)(a^2+9+3a)}{(a+3)(a-3)}=\frac{a^2+3a+9}{a-3}$$

- Nếu $a^2-9=0 \Leftrightarrow a=\pm 3$

* Nếu $a=3$, phương trình đưa về dạng : $-9x-27=27-9x$ phương trì vô nghiệm.

* Nếu $a=-3$, phương trình đưa về dạng : $-9x-27=-27-9x$ phương trình vô số nghiệm.

c) $a(x-1)=x+b \Leftrightarrow ax-x=a+b \Leftrightarrow (a-1)x=a+b$

- Nếu $a-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$, phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{a+b}{a-1}$
- Nếu $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$, phương trình đưa về dạng : $x-1=x+b$

* Nếu $b=-1$, phương trình vô số nghiệm

* Nếu $b\neq -1$, phương trình vô nghiệm.

d) $a(2x-3)=x+b \Leftrightarrow 2ax-3a=x+b \Leftrightarrow (2a-1)x=b+3a$

- Nếu $2a-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \dfrac{1}{2}$, phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{b+3a}{2a-1}$
- Nếu $2a-1=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho đưa về dạng :

$$x-\frac{3}{2}=x+b$$

* Nếu $b=-\dfrac{3}{2}$ thì phương trình vô số nghiệm.

* Nếu $b\neq -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

6. a) $\begin{cases} y=11-2x & (1)\\ 5x-4y=8 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) thế vào (2) ta có : $5x-4(11-2x)=8 \Leftrightarrow 13x=52 \Leftrightarrow x=4$

Thay $x=4$ vào (1) ta được $y=11-8=3$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(4;3)$

b) $\begin{cases} 3x=y+1 & (1)\\ 6x-2y=5 & (2)\end{cases}$

Từ (1) ta có $y=3x-1$, thế vào (2) ta có: $6x-2(3x-1)=5 \Leftrightarrow 2=5$ vô lí

Vậy hệ vô nghiệm.

c) ĐKXĐ : $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 18 & (1) \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với 4 rồi cộng với (2) ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x} = 123 & (1)' \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 & (2) \end{cases}$$

Từ (1)' $\Rightarrow x = \dfrac{9}{123} = \dfrac{3}{41}$ thay vào (2) ta được :

$$\frac{5}{\frac{3}{41}} + \frac{4}{y} = 51 \Rightarrow \frac{4}{y} = 51 - \frac{205}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{y} = -\frac{52}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{12}{52} = -\frac{3}{13}$$

Hai giá trị $x = \dfrac{3}{41}$ và $y = -\dfrac{3}{13}$ đều thoả mãn ĐKXĐ

Vậy nghiệm của hệ là : $(x; y) = \left(\dfrac{3}{41}; -\dfrac{3}{13}\right)$

d) ĐKXĐ : $x \neq 1$ và $y \neq -2$

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 1 & (1) \\ \dfrac{25}{x-1} + \dfrac{3}{y+2} = 2 & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với 3 rồi trừ đi (2) ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 1 & (1) \\ \dfrac{5}{x-1} = -1 & (2)' \end{cases}$$

Từ (2)' suy ra $x = -4$, thay vào (1) ta có :

$$-2 + \frac{1}{y+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y+2} = 3 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$$

$x = -$ và $y = -\dfrac{5}{3}$ thoả mãn ĐKXĐ. Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$(x ; y) = \left(-4; -\dfrac{5}{3}\right)$.

7. Đặt $|x + y| = u$ và $|x - y| = u$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2u - v = 9 \\ 3u + 2v = 17 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7;$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 17 = 35,\ u = \frac{D_u}{D} = \frac{37}{7} = 5$$

$$D_v = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = 34 - 27 = 7,\ v = \frac{D_v}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\begin{cases} |x + y| = 5 \\ |x - y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + y = -5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

* $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

* $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ có nghiệm : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm : $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ có nghiệm : $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$

Hệ phương trình có 4 nghiệm :

$$(x\ ;\ y) = (3;\ 2)\ ;\ (2;\ 3);\ (-2;\ -3);\ (-3;\ -2).$$

8. a) $\begin{cases} mx + 3y = m - 1 & (1) \\ 2x + (m - 1)y = 3 & (2) \end{cases}$

Cách 1. Từ phương trình (2) rút ra $x = \dfrac{3 - (m - 1)y}{2}$ (*) thay vào (1) ta có

$$m.\frac{3 - (m - 1)y}{2} + 3y = m - 1 \Leftrightarrow 3m - m(m - 1)y + 6y = 2(m - 1)$$

$$\Leftrightarrow (-m^2 + m + 6)y = -m - 2$$

- Nếu $-m^2 + m + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (3 - m)(2 + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3,\ m \neq -2$ thì phươn trình có nghiệm

$$y = \frac{-(m + 2)}{(3 - m)(2 + m)} = \frac{1}{m - 3}$$

Từ (*) $\Rightarrow x = \dfrac{m-4}{m-3}$

Vậy với $m \neq 3$, $m \neq -2$ thì hệ phương trình có một nghiệm

$$(x\,;\,y) = \left(\frac{m-4}{m-3};\frac{1}{m-3}\right)$$

- Nếu $-m^2 + m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ và $m = -2$

* Với $m = 3$ thì hệ đưa về dạng $\begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ hệ phương trình vô nghiệm:

- Với $m = -2$ thì hệ phương trình đưa về dạng $\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

hệ phương trình vô số nghiệm.

Cách 2 Xét các định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & 3 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m - 8 = (m-4)(m+2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m-1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m - 2(m-1) = m + 2$$

Nếu $D \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$, $m \neq -2$ thì phương trình có một nghiệm

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(m+2)(m-4)}{(m+2)(m-3)} = \dfrac{m-4}{m-3} \\[2ex] y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(m+2)}{(m+2)(m-3)} = \dfrac{1}{m-3} \end{cases}$$

Nếu $D = 0 \Rightarrow m = 3$, $m = -2$

* $m = 3$ hệ phương trình đưa về dạng $\begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ ta có :

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$$ hệ vô nghiệm

* $m = -2$ hệ phương trình đưa về dạng $\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

ta có: $\dfrac{-2}{2} = \dfrac{3}{-3} = \dfrac{-3}{3}$ nên hệ vô số nghiệm

b) $\begin{cases} 5x - (m - 2)y = m \\ mx + (m + 3)y = 2m \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -(m - 2) \\ m & m + 3 \end{vmatrix} = 5(m + 3) + m(m - 2) = m^2 + 3m + 15$$

$$= \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{51}{4} > 0 \ \forall m$$

suy ra $D \neq 0 \ \forall m$.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -(m - 2) \\ 2m & m + 3 \end{vmatrix} = 3m^2 - m \ ; \ D_y = \begin{vmatrix} 5 & m \\ m & 2m \end{vmatrix} = 10m - m^2$$

$D \neq 0$, $\forall m$, nên phương trình có một nghiệm

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3m^2 - m}{m^2 + 3m + 15}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10m - m^2}{m^2 + 3m + 15}$$

c) $\begin{cases} m^2x + (2 - m)y = m^3 + 4 \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2 \end{cases}$ HS tự làm.

9. Hệ $\begin{cases} (c + 1)^2x - (c + 1)y = -c \\ (d - 1)x + (5 - 2d)y = c + 4 \end{cases}$ có một nghiệm (x; y) = (1; 1) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} (c + 1)^2 - (c + 1) = -c \\ (d - 1) + (5 - 2d) = c + 4 \end{cases} <=> \begin{cases} c^2 + 2c = 0 \ (1) \\ c + d = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (1) : $c^2 + 2c = 0 <=> c(c + 2) = 0 <=> \left[\begin{matrix} c = 0 \\ c = -2 \end{matrix}\right.$

Với $c = 0 => d = 0$

Với $c = -2 => d = 2$

Như vậy ta có hai cặp giá trị của c và d : $c = 0$ và $d = 0$

$c = -2$ và $d = 2$.

10. a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 & (1) \\ 4x + 2y - 2z = 7 & (2) \\ x - 2y + z = 5 & (3) \end{cases}$

Nhân hai vế của (1) với −2 rồi cộng với (2), ta được hệ :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 & (1) \\ \quad -4y + 8z = 5 & (2)' \\ x - 2y + z = 5 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (3) với −2 rồi cộng với (1), ta được hệ :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 & (1) \\ \quad -4y + 8z = 5 & (2)' \\ \quad 7y - 7z = -9 & (3)' \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2)' với 7 và nhân hai vế của (3)' với 4 rồi cộng chúng lại, ta được hệ:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ \quad -4y + 8z = 5 \\ \qquad 28z = -1 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối, ta tìm được $z = -\frac{1}{28}$, thay vào phương trình thứ hai, ta tìm được $y = \frac{5 + \frac{2}{7}}{-4} = -\frac{37}{28}$, thay $z = -\frac{1}{28}$ và $y = -\frac{37}{28}$ vào (1) ta tìm được $x = \frac{67}{28}$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là : $(x; y; z) = \left(\frac{67}{28}; \frac{-37}{28}; -\frac{1}{28}\right)$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 6 & (1) \\ 3x + 2y + z = 9 & (2) \\ -x + 3y + 5z = 6 & (3) \end{cases}$

Nhân cả hai vế của (3) với 3 rồi cộng với (2) ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 & (1) \\ \quad 11y + 16z = 27 & (2)' \\ -x + 3y + 5z = 6 & (3) \end{cases}$$

Nhân cả hai vế của (3) với 2 rồi cộng với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} \quad 7y + 11z = 18 & (1)' \\ \quad 11y + 16z = 27 & (2)' \\ -x + 3y + 5z = 6 & (3) \end{cases}$$

Nhân cả hai vế của (1)' với −11 và nhân cả hai vế của (2)' với 7, rồi cộng chúng lại với nhau, ta có hệ

$$\begin{cases} \qquad -9z = -9 \\ \quad 11y + 16z = 27 \\ -x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu ta có z = 1 thay vào phương trình thứ hai, ta tìm được y = 1. Thay y = 1, z = 1 vào phương trình cuối ta tìm được x = 2. Nghiệm của hệ phương trình là (x; y; z) = (2; 1; 1).

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ ax + by + cz = d & (2) \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 & (3) \end{cases}$

Lấy (1) nhân với (-c) rồi cộng với (2) ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ (a - c)x + (b - c)y = d - c & (2)' \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân với $(-c^2)$ rồi cộng với (3) ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ (a - c)x + (b - c)y = d - c & (2) \\ (a^2 - c^2)x + (b^2 - c^2)y = d^2 - c^2 & (3)' \end{cases}$$

Lấy (2)' nhân với $-(b + c)$ cộng với (3)' ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a - c)x + (b - c)y = d - c \\ (a - c)(a - b)x = (c - d)(b - d) \end{cases}$$

Do a, b, c là 3 số khác nhau và khác 0, nên $a - c \neq 0$, $a - b \neq 0$.

Vậy từ phương trình cuối ta tìm được $x = \dfrac{(c - d)(b - d)}{(a - c)(a - b)}$

Thay vào phương trình thứ hai ta tìm được $y = \dfrac{(a - d)(d - c)}{(a - b)(b - c)}$

Thay x, y vừa tìm được vào phương trình đầu ta tìm được

$$z = \frac{(a - d)(b - d)}{(a - c)(b - c)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là :

$$(x; y; z) = \left(\frac{(c - d)(b - d)}{(a - c)(a - b)}; \frac{(a - d)(d - c)}{(a - b)(b - c)}; \frac{(a - d)(b - d)}{(a - c)(b - c)}\right).$$

11. a) Nếu $a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$, phương trình vô nghiệm

Nếu $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$, phương trình có một nghiệm kép $x_1 = x_2 = 0$

Nếu $a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{a + 1}.$$

b) • Nếu $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$, phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$

- Nếu $\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 1 - (k - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k > 2 \end{cases} \Leftrightarrow k > 2$ phương trình vô nghiệm

- Nếu $\begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$, phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = 1.$$

- Nếu $\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 2 - k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq k < 2$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt :

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2 - k}}{k - 1}$

c) ĐKXĐ : $x \neq -1$, $(m \neq 1)$

$\dfrac{x}{m - 1} = \dfrac{2}{x + 1}$ (1) $\Rightarrow x^2 + x - 2(m - 1) = 0$ (*)

$\Delta = 1 + 8(m - 1) = 8m - 7$

- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow 8m - 7 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{7}{8}$, phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow 8m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{8}$, thì ta có :

phương trình $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$, phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

- Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow m > \dfrac{7}{8}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm.

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{8m - 7}}{2};\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{8m - 7}}{2}$$

* Với $m \neq 1$ và $m > \dfrac{7}{8}$ thì $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{8m - 7}}{2} \neq -1$ (thoả mãn ĐKXĐ, nên x_1 là một nghiệm của phương trình (1)).

* Với $m \neq 1$ và $m > \dfrac{7}{8}$ thì $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{8m - 7}}{2} \neq -1$ (cũng thoả mãn ĐKXĐ, nên x_2 cũng là một nghiệm của phương trình).

(Vì nếu $\sqrt{8m - 7} = 1 \Leftrightarrow 8m - 7 = 1 \Rightarrow m = 1$).

Nói tóm lại:

Nếu $m < \dfrac{7}{8}$, phương trình (1) vô nghiệm

Nếu $m = \frac{7}{8}$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

Nếu $m > \frac{7}{8}$ và $m \neq 1$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8m - 7}}{2}.$$

d) $2kx^2 - 2(\sqrt{2}\,k - 1)x + k = 0$ (2)

- Nếu $k = 0$, phương trình đưa về dạng $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Nếu $k \neq 0$ và $\Delta' = (\sqrt{2}\,k - 1)^2 - 2k^2 = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}\,k + 1 = 0$ thì phương trình có nghiệm kép.

Vậy nếu $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ thì phương trình (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Nếu $k > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($k \neq 0$ và $\Delta' < 0$) phương trình (2) vô nghiệm
- Nếu $k < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ và $k \neq 0$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}k - 1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2}k}}{2k}$$

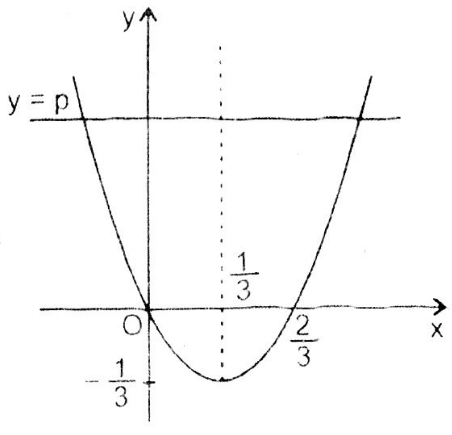
12. a) $3x^2 - 2x + p = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = -p$

Vẽ đồ thị $y = 3x^2 - 2x$ và $y = -p$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy. Số nghiệm của phương trình này bằng số giao điểm của hai đồ thị trên.

Căn cứ vào đồ thị (h. 38)

- Nếu $p > \frac{1}{3}$, phương trình vô nghiệm
- Nếu $p = \frac{1}{3}$, phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$$

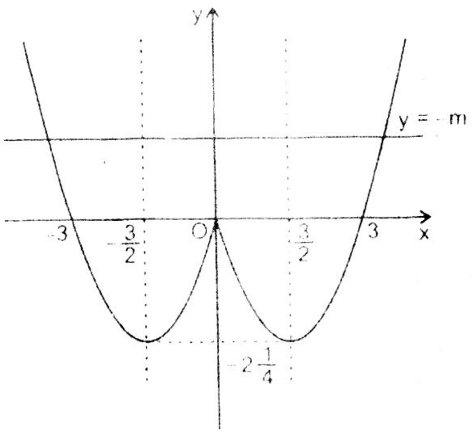


Hình 38

- Nếu $p < \frac{1}{3}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) $x^2 - 3|x| + m = 0 <> x^2 - 3|x| = -m$

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 3|x|$ và $y = -m$ trên cùng một hệ trục toạ độ.



Hình 39

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 3|x|$ chú ý lấy phần đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x$ với $x \geq 0$ rồi lấy cả phần đối xứng với phần này qua trục tung (h. 39).

Nếu $m = 2\frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm kép $x = \pm\frac{3}{2}$.

Nếu $0 < m < 2\frac{1}{4}$, phương trình có 4 nghiệm.

Nếu $m = 0$, phương trình có 3 nghiệm.
Nếu $m < 0$, phương trình có 2 nghiệm.
c) HS tự làm.

13. $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$ (1)

a) Với $a = 3$ ta có phương trình

$$2x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0,\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

b) Muốn (1) vô số nghiệm thì

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2 \\ a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 4 \Leftrightarrow a = 1 \\ a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 1 \end{cases}$$

Vậy với $a = 1$, phương trình (1) vô số nghiệm.

14. a) $(k - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$ (2)

- Nếu $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$, phương trình (2) có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$
- Nếu $k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ và $\Delta' = 1 + k - 1 = k > 0$, thì phương trình (2) có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{k}}{k - 1}$
- Nếu $k < 0$ ($k \neq 1$ và $\Delta' < 0$) phương trình (2) vô nghiệm.
- Nếu $k = 0$ ($k \neq 1$ và $\Delta' = 0$) phương trình (2) có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-1}{k - 1}$$

b) • Để phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = k > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{-1}{k - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k > 0 \Leftrightarrow k > 1 \\ k > 1 \end{cases}$$

- Để phương trình (2) có hai nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = k > 0 \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{k-1} > 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{k-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k > 0 \\ k < 1 \\ k < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 1$$

- Để phương trình (2) có hai nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = k > 0 \\ \dfrac{-1}{k-1} > 0 \\ \dfrac{2}{k-1} < 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy không có giá trị nào của k để (1) có hai nghiệm cùng âm.

- Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ k > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ k > 0 \\ 2 - (k - 1) = (k - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ k > 0 \\ k = 2, k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

Vậy với k = 2 thì $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

15. Gọi giá tiền một quyển vở, một bút chì, một cái tẩy lần lượt là x, y, z (x, y, z dương, đơn vị tính đồng).

Lần thứ nhất bà mua 1 quyển vở, 1 bút chì, 1 cái tẩy hết 6000 đ ta có phương trình $x + y + z = 6000$

Tương tự với lần thứ 2 và ba, ta có các phương trình

$2x + 3y + z = 13000$; $5x + 2y + 3z = 22000$

Vậy ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} x + y + z = 6000 & (1) \\ 2x + 3y + z = 13000 & (2) \\ 5x + 2y + 3z = 22000 & (3) \end{cases}$

Giải hệ $\begin{cases} x + y + z = 6000 & (1) \\ 2x + 3y + z = 13000 & (2) \\ 5x + 2y + 3z = 22000 & (3) \end{cases}$

Nhân hai vế của (1) với (-2) rồi cộng với (2) ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 6000 & (1) \\ y - z = 1000 & (2)' \\ 5x + 2y + 3z = 22000 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với (−5) rồi cộng với (3) ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 6000 & (1) \\ y - z = 10000 & (2)' \\ -3y - 2z = -8000 & (3)' \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2)' với (−3) rồi cộng với (3') ta có hệ :

$$\begin{cases} x + y + z = 6000 \\ y - z = 1000 \\ -5z = -5000 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối ta tìm được z = 1000; thay vào phương trình thứ hai ta tìm được y = 2000 ; thay z = 1000; y = 2000 vào phương trình đầu ta tìm được x = 3000.

Nghiệm của hệ phương trình là : (x; y; z) = (3000; 2000 ; 1000). Vậy giá tiền một quyển vở, một cái bút chì, một cái tẩy lần lượt là 3000 đ, 2000 đ, 1000 đ.

CHƯƠNG 4

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các mệnh đề "$A > B$", "$A < B$" "$A \leq B$" được gọi là các *bất đẳng thức* (BĐT); trong đó A, B, C là các biểu thức số.

2. Các tính chất cơ bản của BĐT[1]

2a. Tính chất bắc cầu $\begin{cases} A > B \\ B > C \end{cases} \Rightarrow A > C$

2b. Các tính chất liên quan đến phép cộng

- $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$
- $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$ (Cộng 2 BĐT cùng chiều)
- $A + C > B \Leftrightarrow A > B - C$ (Chuyển vế, đổi dấu)

2c. Các tính chất liên quan đến phép nhân

- $A > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A.C > B.C & (C > 0) \\ A.C < B.C & (C < 0) \end{array}\right.$
- $\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow A.C > B.D$ (Nhân 2 BĐT cùng chiều, các vế đều dương).

2d. Các tính chất liên quan đến phép lũy thừa và phép khai căn

- $A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \; (n \in N^*)$

$$A > B > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{A} > \sqrt{B} \\ \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B} \end{array}\right.$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Viết lại các tính chất với BĐT "$A < B$"

2. Các mệnh đề sau đúng hay sai :

a) $A < B \Leftrightarrow A + C < B + C$; b) $A > B \Leftrightarrow A - C > B - C$

c) $\begin{cases} A > B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$; d) $\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A + C < B + D$

---

(1) Chỉ lấy "$A > B$" làm đại diện. Các dạng BĐT khác cũng tương tự.

e) $\begin{cases} A < B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C < B + D$; f) $A + C > B + D \Rightarrow \begin{cases} A > C \\ B > D \end{cases}$

g) $A > B \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C} (C > 0) \\ \dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C} (C < 0) \end{array}\right.$; h) $(a \pm b)^2 > 0$, $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$

i) $(a \pm b)^2 \geq 0$, $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$; k) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$, $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$.

. Không dùng máy tính hay bảng số, hãy so sánh :

a) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ với 4 ; b) $\sqrt{2} - \sqrt{7}$ với $-\dfrac{1}{2}$.

. Tìm tất cả các số thực biết

a) $-2x < 4$; b) $3x > -3$; c) $\dfrac{x + 1}{5} < 1$

d) $\dfrac{1}{x^2 + 1} > 0$; e) $3x - 2 \leq x$; f) $2|x| > 0$.

. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $a^2 + a > b^2 + b$, $\forall a > b > 0$; b) $a^4 + b^4 \geq a^3.b + a.b^3$, $\forall$a, b$\in \mathbb{R}$;

c) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$ $\forall a > 0; b > 0$; d) $a^3 - a^2.b \geq b^2.a - b^3$, $\forall$a, b$\in \mathbb{R}$;

e) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^4 + b^2 + c^2)$ $\forall$a, b$\in \mathbb{R}$;

f) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ $\forall$a, b, c $\in \mathbb{R}$.

. Cho a, b, p > 0. Chứng minh :

a) Nếu a < b thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + p}{b + p}$; b) Nếu a > b thì $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a + p}{b + p}$.

7. Cho b, d > 0 và $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$. Chứng minh $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + c}{b + d} < \dfrac{c}{d}$.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI. TRẢ LỜI.

. Bạn đọc tự làm.

. a) Đ ; b) Đ ; c) S ; d) Đ ; e) S ; f) S ; g) Đ ; h) S ; i) Đ ; k) S.

. a) Giả sử $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{15} < 4$

$\Leftrightarrow 15 < 16$ (Đúng)

Vậy $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$.

b) Giả sử $\sqrt{2} - \sqrt{7} < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{7} - \sqrt{2} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 > \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{14} < 35 \Leftrightarrow 64.14 < 1225$ (đúng)

Vậy $\sqrt{2}-\sqrt{7}<-\dfrac{1}{2}$.

4. a) $-2x<4\Leftrightarrow x>-2$; b) $3x>-3\Leftrightarrow x>-1$

c) $\dfrac{x+1}{5}<1\Leftrightarrow x+1<5\Leftrightarrow x<4$

d) $\dfrac{1}{x^2+1}>0\Leftrightarrow x^2+1>0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

e) $3x-2\le x\Leftrightarrow 2x\le 2\Leftrightarrow x\le 1$; f) $2|x|>0\Leftrightarrow |x|>0\Leftrightarrow x\ne 0$.

5. a) $a^2+a>b^2+b\Leftrightarrow (a^2-b^2)+(a-b)>0\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)>0$

đúng vì $a-b>0$ và $a+b+1>0$ theo gt.

b) $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3\Leftrightarrow (a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)>0\Leftrightarrow (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$

BĐT này đúng vì $(a-b)^2\ge 0$ và $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\ge 0$

Dấu (=) xảy ra khi $a=b=0$

c) Xét, $\dfrac{a^3+b^3}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3=\dfrac{3(a^3+b^3)-3ab(a+b)}{8}$

$$=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}\ge 0,\ \forall a,b\subset\mathbb{R}\Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu (=) xảy ra khi $a=b$

d) Xét $a^3-a^2.b-b^2.a+b^3=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$$=(a-b)^2(a+b)>0\ \forall a,b\in R\Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu (=) xảy ra khi $a=b$

e) Xét $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2a.b-2a.c-2b.c$

$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0\Rightarrow$ đpcm

Dấu (=) xảy ra khi $a=b=c$

f) Xét $(a+b+c)^2-3(a.b+b.c+c.a)=a^2+b^2+c^2-a.b-a.c-b.c$

$=\dfrac{1}{2}(a-b)^2+\dfrac{1}{2}(a-c)^2+\dfrac{1}{2}(b-c)^2\ge 0\Rightarrow$ đpcm

Dấu (=) xảy ra khi $a=b=c$.

6. a) Xét: $\dfrac{a+p}{b+p}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b.p-a.p}{b(b+p)}=\dfrac{p(a-b)}{b(b+p)}>0\Rightarrow$ đpcm.

b) Tương tự a).

7. Cần chứng minh $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$ (1) và $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ (2)

Xét các hiệu $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a+c}{b+d}$

§2. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hai BĐT về giá trị tuyệt đối

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$|a + b| \le |a| + |b|$ $\qquad$ $||a| - |b|| \le |a - b|$

(Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a.b \ge 0$)

2. BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân

$\forall a, b \ge 0 : \dfrac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

Mở rộng cho 3 số, 4 số không âm :

$\forall a, b, c \ge 0 : \dfrac{a + b + c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ (Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$)

$\forall a, b, c, d \ge 0 : \dfrac{a + b + c + d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$ (Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$).

3. Hai áp dụng cần nhớ

3a	3b
Nếu 2 số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi $\Rightarrow$ Tích lớn nhất khi 2 số đó bằng nhau	Nếu 2 số dương thay đổi nhưng có tích không đổi $\Rightarrow$ Tổng nhỏ nhất khi 2 số đó bằng nhau
$\begin{cases} x + y = S \text{ (không đổi)} \\ x, y > 0 \end{cases} \Rightarrow xy \le \dfrac{S^2}{4}$	$\begin{cases} xy = P \text{ (không đổi)} \\ x, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x + y \ge 2\sqrt{P}$
(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{S}{2}$)	(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \sqrt{P}$).

4. Một BĐT nên nhớ

$$\begin{cases} \forall (a; b)(x; y) : (ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ a, b, x, y \in R^* \end{cases}$$

(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$).

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Chứng minh các BĐT

a) $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc,\ \forall a, b, c > 0.$

b) $(a + b)(a.b + 1) \geq 4a.b,\ \forall a, b \geq 0.$

c) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9,\ \forall a, b, c > 0.$

d) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8,\ \forall a, b, c > 0$

e) $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} > 2\ \forall x \in \mathbb{R}$; f) $\frac{x + 8}{\sqrt{x - 1}} \geq 6\ \forall x > 1.$

2. Tìm (nếu có) giá trị nhỏ nhất(GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN) của c hàm số sau :

a) $y = (3 - x)(4 + x)$ với $-4 < x < 3$; b) $y = x + \frac{1}{x - 2}$ với $x > 2$.

c) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ với $x > 0$;

d) $y = \sqrt{(x - 1)(2 - x)}$ với $1 \leq x \leq 2$; e) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{3 - x}$.

3. Chứng minh rằng

a) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $-\sqrt{5} < x + 2y \leq \sqrt{5}$

b) Nếu $x^2 + y^2 = 2$ thì $-2\sqrt{5} < 3x + y \leq 2\sqrt{5}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI – TRẢ LỜI

1. a) Có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ac}$

Nhân các BĐT trên (các vế không âm) được BĐT cần chứng minh

Đẳng thức xảy ra <> $a = b = c$.

b) Có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$ab + 1 \geq 2\sqrt{ab.1} = 2\sqrt{ab}$

Nhân vế với vế 2 BĐT trên được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy r $\Leftrightarrow a = b = 1$.

c) Có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

Nhân vế với vế được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra <> $a = b = c$.

d) $1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$; $1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}$ $1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$

Nhân vế với vế các BĐT trên được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

e) Có $\dfrac{(x^2 + 1) + 1}{2} \ge \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 + 2 \ge \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

f) Có $\dfrac{(x - 1) + 9}{2} \ge \sqrt{9(x - 1)} = 3\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x + 8 \ge 6\sqrt{x - 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 8}{\sqrt{x - 1}} \ge 6 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 10$.

2. a) Với $x = -4$ hoặc $x = 3$ thì $y = 0$. Với $-4 < x < 3$ thì $3 - x > 0$ và $4 + x > 0$ nên $y > 0$. Vậy GTNN của y là 0 khi $x = -4$ hoặc $x = 3$.

Với $-4 < x < 3$, áp dụng 3a, I (vì $(3 - x) + (4 + x) = 7$) ta thấy

$y = (3 - x)(4 + x)$ lớn nhất khi $3 - x = 4 + x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ GTLN của y là 12,25.

b) Xét $y - 2 = (x - 2) + \dfrac{1}{x - 2}$

Đặt $Y = y - 2$, ta có $Y = (x - 2) + \dfrac{1}{x - 2}$

Với $x > 2$ thì Y là tổng của 2 số dương có tích không đổi (bằng 1).

Áp dụng (3b, I) có Y nhỏ nhất $\Leftrightarrow x - 2 = \dfrac{1}{x - 2} \Leftrightarrow x = 3$. Suy ra y nhỏ nhất khi $x = 3$ và GTNN của y là 4.

c) Với $x > 0$ thì $y = x + 1 + \dfrac{1}{x}$ hay $y - 1 = x + \dfrac{1}{x}$

Áp dụng (3b, I) tương tự câu b) ta được GTNN của y là 3 khi $x = 1$.

d) TXĐ của $y = \sqrt{(x - 2)} + \sqrt{(3 - x)}$ là $2 \le x \le 3$

Với $x = 2$ hoặc $x = 3$ thì $y = 0$ là GTNN.

Xét $y^2 = 1 + 2\sqrt{(x - 2)(3 - x)} = 1 + 2A$

Áp dụng (3a, I) vào $A = \sqrt{(x - 2)(3 - x)}$ có A lớn nhất $\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Suy ra y lớn nhất là $2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{5}{2}$.

3. a) Áp dụng (4*, I) với các cặp số (1; 2) và(x; y) ta có

$$(x + 2y)^2 \le (1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 5$$

Suy ra $-\sqrt{5} \le x + 2y < \sqrt{5}$ (đpcm)

b) Tương tự, áp dụng (4*, I) với các cặp số (3; 1) và(x; y) ta có

$$(3x + y)^2 < 10(x^2 + y^2) = 20$$

Suy ra $-2\sqrt{5} < 3x + y < 2\sqrt{5}$ (đpcm).

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một số khái niệm

Bất phương trình (BPT) một ẩn x có dạng

$$f(x) < g(x),\ f(x) > g(x),\ f(x) \le g(x),\ f(x) \ge g(x)$$

Điều kiện xác định của BPT là các điều kiện để f(x), g(x) có nghĩa và các điều kiện khác (nếu có) mà x phải thỏa mãn

x_0 là một nghiệm của BPT $f(x) < g(x)$ nếu x_0 thỏa mãn ĐKXĐ của BPT và $f(x_0) < g(x_0)$.

Giải BPT là tìm tập nghiệm của BPT

Hai (hay nhiều) BPT được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

2. Các phép biến đổi tương đương BPT

Cho BPT $f(x) < g(x)$ có ĐKXĐ D

Các phép biến đổi *không làm thay đổi ĐKXĐ D của BPT* sau đây là các phép biến đổi tương đương :

a) Cộng vào 2 vế cùng một biểu thức (hoặc một số).

b) Rút gọn các biểu thức (hoặc số) giống nhau ở 2 vế.

c) Chuyển vế và đổi dấu.

d) Nhân 2vế với cùng một biểu thức (hoặc một số) dương.

e) Nhân 2 vế với cùng một biểu thức (hoặc một số) âm và đổi chiều.

f) Nâng 2 vế lên luỹ thừa bậc lẻ.

g) Nâng 2 vế không âm lên lũy thừa bậc chẵn.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. So sánh với các phép biến đổi tương đương một phương trình, có gì giống nhau, khác nhau ?

2. Đúng hay sai ?

a) $2x > x^2 \Leftrightarrow 2 > x$;

b) $\begin{cases} 2x > x^2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x$

c) $2x > x^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0$;

d) $\begin{cases} 2x > x^2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + \dfrac{1}{x} > x^2 + \dfrac{1}{x}$

e) $2x > x^2 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{1}{x^2+1} > x^2 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

3. Tìm ĐKXĐ của các BPT sau

a) $\frac{2x-1}{x^2-1} > 0$; b) $\sqrt{2x-1} > x$

c) $\sqrt{2x-1} < x-3$; d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 1 + x$.

4. Biết rằng có ít nhất một đáp số đúng. Hãy chọn tập nghiệm của BPT :

a) $\frac{2x+1}{x-3} < 0$ $T_1 = \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$; $T_2 = \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$

$T_3 = \left(-\frac{1}{2}; 3\right]$; $T_4 = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

b) $\sqrt{x+1} < x$ $T_1 = (-\infty; -1)$; $T_2 = (-1; 5)$; $T_3 = \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5. Cho BPT : $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 3$ (1)

a) Tìm ĐKXĐ của (1)

b) BPT : $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 > 9$ (2) có tương đương với (1) trên R ?

c) (2) có tương đương với (1) trên $[0; +\infty)$?

d) Xét sự tương đương giữa (1) và $\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 > \left(\sqrt{x+1}\right)^2$.

6. Cho BPT : $|2x - 1| < x + 1$ (1)

a) Tìm ĐKXĐ D của (1)

b) Xét sự tương đương giữa (1) và $(2x-1)^2 < (x+1)^2$ trên R ? trên D ?

7. Cũng hỏi như bài 6 với BPT : $|2x - 1| < |x + 1|$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI – TRẢ LỜI.

1. Bạn đọc tự làm. Chú ý : khác nhau ở 2d và 2e, I.

2. a) Sai. Chia 2 vế cho x mà không phân biệt x âm, x dương và không xét x = 0.

b) Sai. Vì đã thay đổi ĐKXĐ ; c) Đúng, vì áp dụng (2c, I);

d) Đúng, vì áp dụng (2a, I) ; e) Đúng, vì áp dụng (2a, I);

3. a) $x \neq \pm 1$; b) ĐKXĐ : $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

c) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$; d) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

4. a) T_1 ; b) T_3

5. a) ĐKXĐ : $x > 0$; b) Không, vì (1) chỉ xác định trên $D = [0; +\infty)$

c) Có vì theo (2g, I) ; d) Không

6. a) $D = (-1; +\infty)$

b) (1) và (2) không tương đương trên R; tương đương trên D.

7. a) D = R ; b) Tương đương trên R, tức là trên D.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 1 ẨN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải BPT $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$ (1)

$a > 0$*	$a < 0$	$a = 0$
$(1) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$	$(1) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$	$(1) \Leftrightarrow 0x > -b$ $b < 0$: Tập nghiệm $T = \varnothing$ $b > 0$: Tập nghiệm $T = R$
Tập nghiệm $T = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$	Tập nghiệm $T = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$	

2. Giải BPT $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b$ (2)

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
$(1) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$	$(1) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$	$(1) \Leftrightarrow 0x < -b$ $b < 0$: Tập nghiệm $T = R$
Tập nghiệm $T = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$	Tập nghiệm $T = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$	$b \geq 0$: Tập nghiệm $T = \varnothing$

3. Giải hệ BPT bậc nhất 1 ẩn

Giải từng BPT trong hệ

Tìm giao của các tập nghiệm

* Ví dụ về giải và biện luận BPT$^{(1)}$ $ax + b > 0$

Giải và biện luận theo m BPT : $mx - m < 1 + x$ (1)

$(1) \Leftrightarrow (m - 1)x < m + 1$

Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$: $(1) \Leftrightarrow x < \dfrac{m + 1}{m - 1}$

Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$: $(1) \Leftrightarrow x > \dfrac{m + 1}{m - 1}$

Nếu $m = 1$, (1) có dạng $0x < 2$: BPT vô nghiệm.

Kết luận : Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm $T = \left(-\infty; \dfrac{m + 1}{m - 1}\right)$

Nếu $m < 1$ thì tập nghiệm $T = \left(\dfrac{m + 1}{m - 1}; +\infty\right)$

Nếu $m = 1$ thì tập nghiệm $T = \varnothing$.

(*) Chương trình cơ sở không yêu cầu xét trường hợp này.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Giải các BPT : a) $x - \frac{2x-1}{3} < 2x + 5$; b) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} + x$

c) $\frac{2x^2 + 2x - 5}{2 - x} \leq 5 - 2x$.

2. Giải các hệ BPT

a) $\begin{cases} 3x - 5 \leq \dfrac{15x-3}{2} \\ 3(2x-1) > x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x-10}{7} < 2x + 1 \\ x(x-2) \geq (1-x)^2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x - \dfrac{2-x}{3} > 1 \end{cases}$

3. Tìm các nghiệm nguyên của hệ BPT

a) $\begin{cases} 8x - 5 > \dfrac{6(x-1)}{2} \\ 2(2x-3) > 5x - 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \leq \dfrac{x}{5} + 3 \\ 4x - 3 > 2x - 7 \end{cases}$

4. Giải và biện luận các BPT

a) $3m(x - m) \leq 4(x - m)$; b) $mx + m^2 > 2(x - 1) + 3m$.

5. Tìm các giá trị m để hệ BPT sau có nghiệm :

a) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{1-x}{3} < 1 \\ x > m + 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(x-1) \geq x - 2 \\ 2x < m - 2. \end{cases}$

6. Tìm các giá trị p để hệ BPT sau vô nghiệm :

a) $\begin{cases} 2x < 5 \\ 9 + 3x > 0 \\ x - 1 < p \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{1-x}{3} - x < 2x + 1 \\ 3(x + p) < x - 2. \end{cases}$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI – TRẢ LỜI

1. a) $T = (-7; +\infty)$; b) $\left(-\frac{11}{7}; +\infty\right)$; c) $\left(-\infty; \frac{15}{11}\right)$.

2. a) $\left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$; b) $\varnothing$; c) $\left(\frac{5}{4}; 5\right)$.

3. a) $\{1\}$; b) $\{-3; -2; -1; 0\}$.

4. a) $m > \frac{4}{3}$: $T = (-\infty; m]$; $m < \frac{4}{3}$: $T = [m; +\infty)$; $m = \frac{4}{3}$: $T = R$.

b) $m > 2$: $T = (1-m; +\infty)$; $m < 2$: $T = (-\infty; 1-m)$; $m = 2$: $T = \varnothing$.

5. a) Giải BPT (1) được $x < \frac{17}{5}$. Tập nghiệm T_1 được biểu diễn trên trục số là phần không gạch – gạch.

Tập nghiệm T_2 của BPT (2) là $(-\infty; m + 1)$. Muốn hệ BPT có nghiệm,, cầ và đủ là: $m + 1 < \frac{17}{5} \Leftrightarrow m < \frac{12}{5}$

Vậy $m < \frac{12}{5}$ hệ BPT có nghiệm.

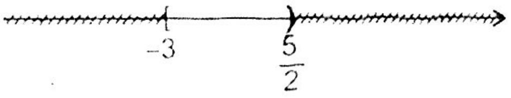
b) BPT (1) cho ta $x > \frac{1}{2}$ có tập nghiệm $T_1 = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

BPT (2) cho ta $x < \frac{m-2}{2}$ có tập nghiệm $T_2 = \left(-\infty; \frac{m-2}{2}\right)$

Muốn hệ BPT có nghiệm, cần và đủ là $\frac{m-2}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 3$

Vậy $m > 3$ hệ BPT đã cho có nghiệm.

6. a) Có $T_1 = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$; $T_2 = (-3 ; +\infty)$



Hình 40

$T_1 \cap T_2 = \left(-3; \frac{5}{2}\right)$

Lại có $T_3 = (-\infty; 1 + p)$

Muốn hệ BPT đã cho vô nghiệm, cần và đủ là $1 + p \le -3 \Leftrightarrow p \le -4$

Vậy $p \le -4$ thì hệ BPT đã cho vô nghiệm.

b) Có $T_1 = \left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$; $T_2 = \left(-\infty; \frac{-2-3p}{2}\right)$

Hệ BPT vô nghiệm khi và chỉ khi $\frac{-2-3p}{2} \le -\frac{1}{5} \Leftrightarrow p \ge -\frac{8}{15}$.

§5. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhị thức bậc nhất (1 biến) là biểu thức dạng $ax + b$ với $a, b \in R$ và $a \neq 0$

Nghiệm của nhị thức bậc nhất $ax + b$ là $x_0 = -\frac{b}{a}$

2. Định lí (về dấu nhị thức $ax + b$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

3. Ứng dụng

a) Giải bất phương trình tích dạng $P(x) > 0$ ($P(x) < 0$ trong đó $P(x)$ là tích các nhị thức bậc nhất.

Ví dụ : Giải BPT : $(x - 2)(2 - 3x) > 0$

Lập bảng xét dấu vế trái (VT)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$x - 2$			|	$-$	0	$+$	
$2 - 3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	

Chọn ra tập nghiệm : $T = \left(\frac{2}{3};2\right)$

b) Giải BPT chứa ẩn ở mẫu dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\left(\frac{P(x)}{Q(x)} > 0\right)$ trong đó P(x), Q(x) là tích các nhị thức bậc nhất.

Ví dụ: Giải BPT $\frac{2}{3 - x} \leq \frac{1}{2x + 1}$

Chuyển vế : $\Leftrightarrow \frac{2}{3 - x} - \frac{1}{2x + 1} \leq 0$

Quy đồng mẫu $\Leftrightarrow \frac{5x - 1}{(3 - x)(2x + 1)} \leq 0$

Xét dấu VT

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
$5x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x + 1$			0	$+$		$+$	$+$	$+$	
VT		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Chọn ra tập nghiệm : $T = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right] \cup (3;+\infty)$.

c) Giải PT, BPT chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ: Giải BPT $|x| + |2 - x| < x + 1$ (1)

Để khử dấu giá trị tuyệt đối, chia trục x thành các khoảng như sau :

Căn cứ vào định nghĩa giá trị tuyệt đối:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x + 2 - x < x + 1 \text{ với } x < 0 \\ x + 2 - x \leq x + 1 \text{ với } 0 \leq x < 2 \\ x + x - 2 < x + 1 \text{ với } x \geq 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Vô nghiệm} \\ 1 \leq x < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < 3 \\ 2 \leq x < 3 \end{array}\right.$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Có nhị thức bậc nhất nào luôn có một dấu (luôn âm hoặc luôn dương) với mọi $x \in R$?

2. Khi giải BPT $\dfrac{2x}{1-x} < 1$ (1), một học sinh làm như sau :

$$(1) \Leftrightarrow 2x < 1 - x \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Cách giải này đúng hay sai ? Tại sao ?

3. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $A = (2x - 3)(4x - 2)$ b) $B = (x + 1)^2(1 - 5x)(2x - 3)$

c) $C = \dfrac{(3 - x)x}{1 - x^2}$.

4. Giải các BPT

a) $\dfrac{2x + 3}{x - 1} \geq 1$;   c) $\dfrac{1}{3x - 2} < \dfrac{2}{1 - 2x}$;

b) $\dfrac{(x + 2)(2x - 4)}{x - 1} \leq 0$;   d) $x^2 - 1 \geq 3x + 3x^2$.

5. Giải các hệ BPT

a) $\begin{cases} x - \dfrac{1 - 2x}{3} < x - 2 \\ 5 < \dfrac{2}{1 - x} \end{cases}$;   c) $\begin{cases} 5x - 3 < 4x - 1 \\ \dfrac{x}{2 - x} \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{x - 2} \geq 0 \\ 3x + 1 \geq 2x + 7 \end{cases}$;   d) $\begin{cases} |x| < 3 \\ \dfrac{2x - 1}{x} \geq 1. \end{cases}$

6. Giải các BPT :

a) $\dfrac{2x - 1}{|x - 1|} < 1$; b) $|2x - 1| \geq |x - 3| + x$; c) $\dfrac{2|x - 1| - 1}{3x - 5} \geq 0$

7. Tính m để hệ BPT $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{x - 2} \leq 0 \\ 4x + 1 \leq m \end{cases}$

a) vô nghiệm ;   b) có nghiệm duy nhất.

8. Tính a để hệ BPT sau vô nghiệm $\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 \\ (x + 2)^2 \geq (x - 1)^2 + 9. \\ |x| < a \end{cases}$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. Không có, vì mọi nhị thức bậc nhất đều có nghiệm.

2. Học sinh đó đã sai : BPT (a) không tương đương với $2 < 1 - x$

Khi nhân 2 vế của BPT với $(1 - x)$, học sinh này đã không xét riêng 2 trường hợp $(1 - x) > 0$ và $(1 - x) < 0$ như các phép biến đổi tương đương 2d, 3e ở §3.

3. a) $A < 0$ khi $\frac{1}{x} < x < \frac{3}{2}$; $A > 0$ khi $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.

b) Vì $(x + 1)^2 > 0$ nên chỉ cần xét dấu $B' = (1 - 5x)(2x - 3)$

$B' > 0$ khi $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{2}$ nên $B > 0$ khi $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{2}$

$B' < 0$ khi $x < \frac{1}{5}$ hoặc $x > \frac{3}{2}$, nên $B < 0$ khi $x < \frac{1}{5}$ $(x \neq -1)$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.

c) $C = \frac{(3 - x)x}{(1 - x)(1 + x)}$ rồi lập bảng xét dấu.

$C > 0$ khi $x < -1$ hoặc $0 < x < 1$ hoặc $x > 3$

$C < 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $1 < x < 3$.

4. a) $T = (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; b) $T = (-\infty; -2] \cup (1; 2]$

c) $T = \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$; d) $T = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

5. a) $T = \varnothing$; b) $T = [6; +\infty)$; c) $T = [1; 2)$; d) $T = (-3; 0] \cup [1; 3)$.

6. a) ĐKXĐ $x \neq 1$ BPT $\Leftrightarrow 2x - 1 < |x - 1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 < x - 1 \text{ với } x > 1 \\ 2x - 1 < 1 - x \text{ với } x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

b) $$\text{BPT} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 2x \geq 3 \text{ với } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \geq 3 \text{ với } \frac{1}{2} \leq x < 3 \\ 0x \geq -2 \text{ với } x \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 2$$

c) $$\text{BPT} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x - 3}{3x - 5} \geq 0 \text{ với } x \geq 1 \\ \frac{-2x + 1}{3x - 5} \geq 0 \text{ với } x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{3}{2}; x \geq \frac{5}{3} \text{ với } x \geq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{3} \text{ với } x < 1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x \leq \frac{3}{2}; x \geq \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow T = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

7. Hệ BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le \dfrac{m-1}{4} \end{cases}$

a) Muốn cho hệ BPT vô nghiệm, cần và đủ là $\dfrac{m-1}{4} < 1 \Leftrightarrow m < 5$.

b) Muốn cho hệ BPT có nghiệm duy nhất, cần và đủ là

$$\frac{m-1}{4} = 1 \Leftrightarrow m = 5.$$

8. Giải hệ gồm 2 BPT đầu ta được $x \ge 1$. Kết hợp với BPT (3) suy ra $a \le 1$.

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. BPT bậc nhất 2 ẩn x, y là BPT có dạng :

$$ax + by + c > 0 \ (ax + by + c < 0) \text{ với } a^2 + b^2 \ne 0$$

Nghiệm của BPT $ax + by + c > 0$ $(ax + by + c < 0)$ là một cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ $(ax_0 + by_0 + c < 0)$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ là một điểm. Tập hợp các điểm đó là miền nghiệm của BPT.

2. Định lí

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thẳng d (d) : $ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ d) là miền nghiệm của BPT $ax + by + c > 0$; nửa mặt phẳng kia (không kể bờ d) là miền nghiệm của BPT $ax + by + c < 0$.

3. Quy tắc xác định miền nghiệm của BPT

$$ax + by + c > 0 \ (ax + by + c < 0)$$

Trên mặt phẳng Oxy, vẽ đường thẳng $ax + by + c = 0$ (d)

Chọn 1 điểm $M_0(x_0; y_0)$ nào đó không nằm trên (d). Xác định dấu của $ax_0 + by_0 + c$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ $(ax + by + c > 0)$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa M_0 là miền nghiệm của BPT.

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ $(ax + by + c > 0)$ thì nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là miền nghiệm của BPT.

4. Giải hệ BPT bậc nhất 2 ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 > 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0 & (2) \\ \dots \\ a_nx + b_ny + c_n > 0 & (n) \end{cases}$$

Cách giải:

- Xác định các miền nghiệm $T_1, T_2, \dots T_n$ của từng BPT trong hệ.
- Lấy giao của các miền nghiệm.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Giải các BPT

a) $2x - 3y \leq 0$; b) $x - y > -3$; c)* $x^2 - y^2 \geq 0$.

2. Xác định miền nghiệm của các hệ BPT

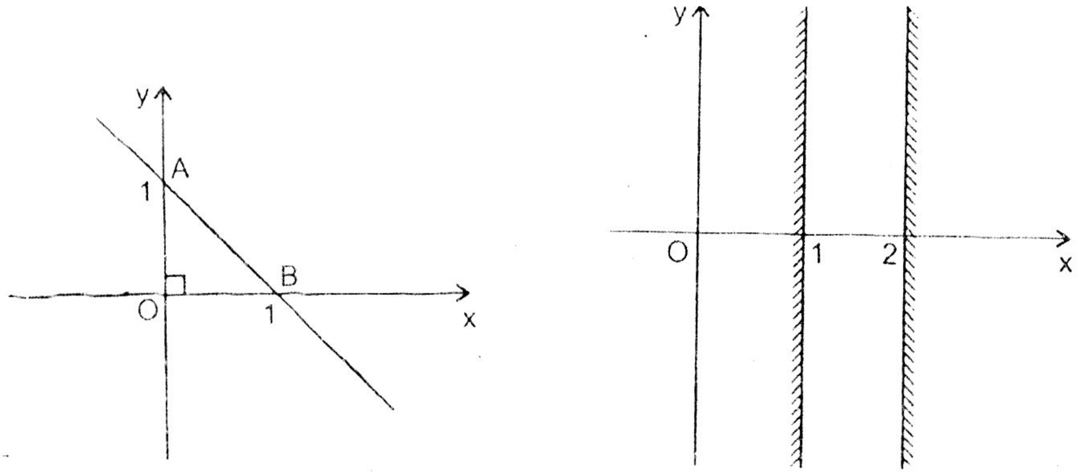
a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0. \end{cases}$

3. Xác định miền nghiệm của

a) $xy < 0$; b) $\begin{cases} |x| < 3 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x \geq 1 \\ |y| > 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} |x| \leq 3 \\ |y| \leq 2. \end{cases}$

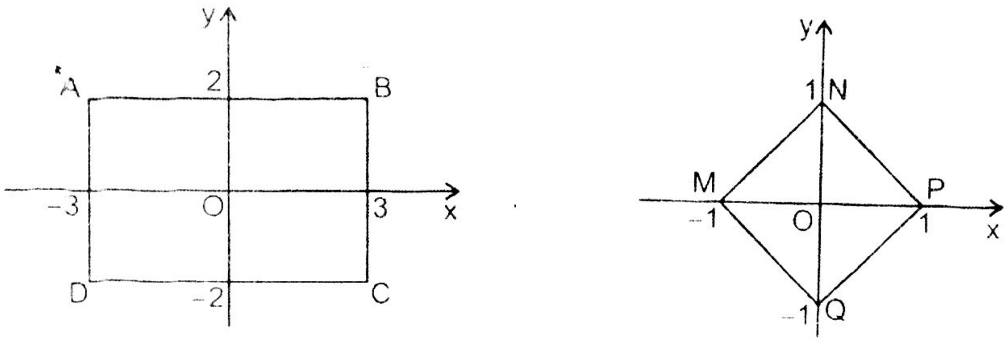
4. Các miền sau đây trên mặt phẳng Oxy biểu thị cho các hệ BPT nào ?

a) Góc vuông thứ II (kể cả biên).



b) Tam giác vuông OAB

c) Phần không gạch (kể cả biên)



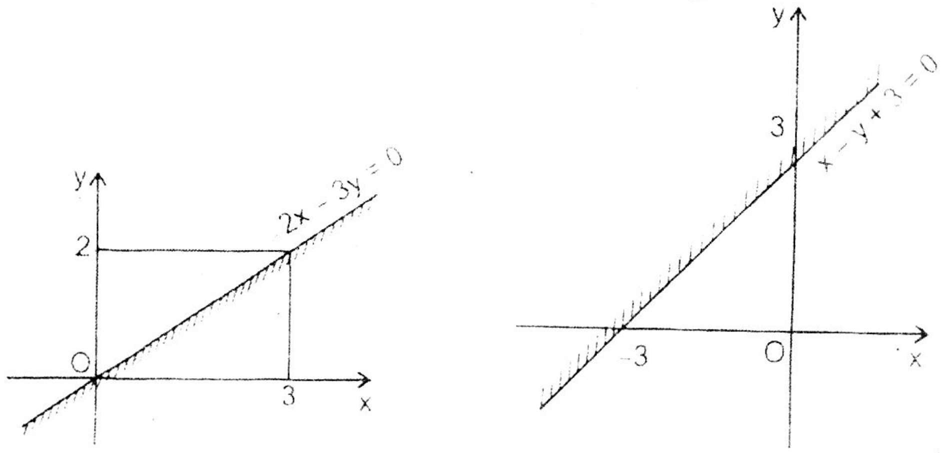
d) Hình chữ nhật ABCD

e) Hình vuông MNPQ

Hình 41

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. a) (kể cả biên) b) (không kể biên)

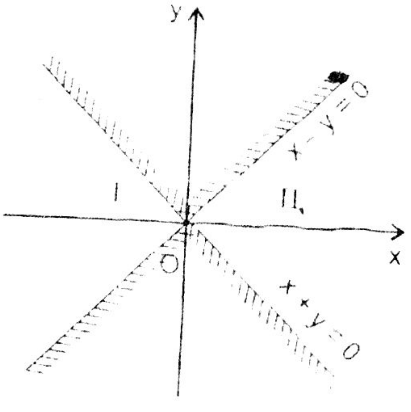

y
2
2x - 3y = 0
O
3
x
y
3
x - y + 3 = 0
-3
O
x

Hình 42

c) Gồm 2 miền I và II xác định bởi (kể cả biên)

$$\text{I}\begin{cases} x - y \le 0 \\ x + y \le 0 \end{cases};$$

$$\text{II}\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$$

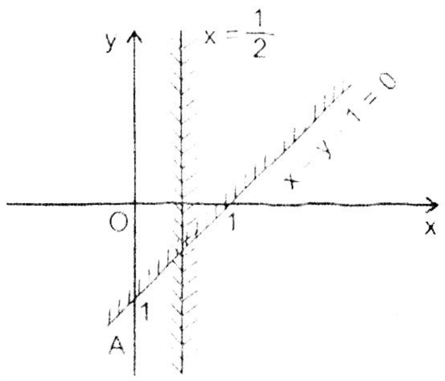

y
x - y = 0
I
II
O
x
x + y = 0

Hình 43

2. a) Góc vuông I (không kể biên)

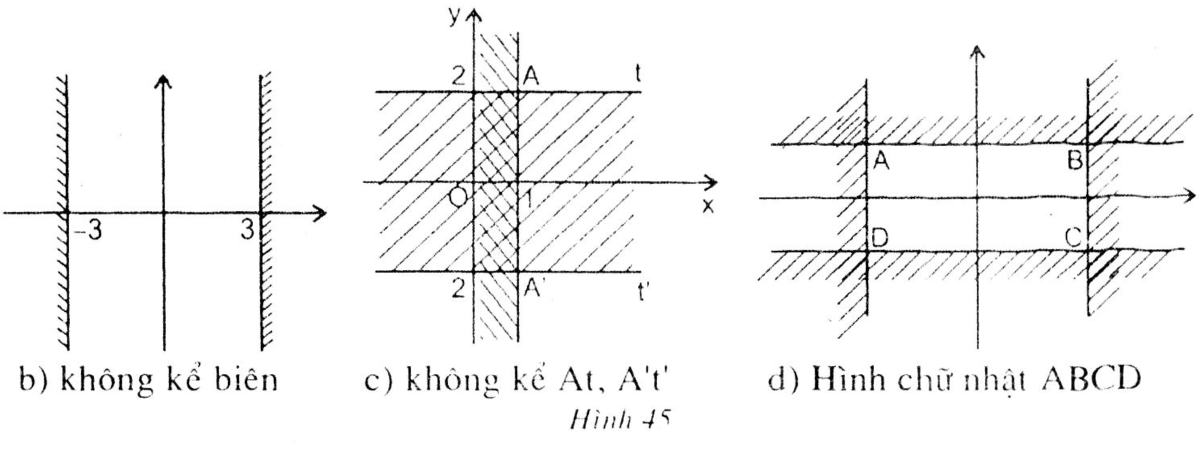
b) Góc vuông III (kể cả biên)

c) Miền A có biên $x - y - 1 = 0$, không có biên $x = \frac{1}{2}$.


y
x = 1/2
x - y - 1 = 0
O
1
x
1
A

Hình 44

3. a) Các góc vuông II, IV (không kể biên)


-3
3
y
2
A
t
O
1
x
2
A'
t'
A
B
D
C

b) không kể biên c) không kể At, A't' d) Hình chữ nhật ABCD

Hình 45

4. a) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 1 \le 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x > 1 \\ x \le 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| \le 3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + y - 1 \le 0 \\ x + y - 1 \ge 0 \\ -x + y - 1 \le 0 \\ x - y - 1 \ge 0 \end{cases}$.

§7. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tam thức bậc hai (một biến) là biểu thức dạng

$$ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$$

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac < 0$) thì tam thức vô nghiệm

Nếu $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) thì tam thức có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b'}{a}$

Nếu $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) thì tam thức có 2 nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(\text{hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$

Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in R$

Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \ne -\dfrac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} af(x) < 0, \forall x \in (x_1, x_2) \\ af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \end{array}\right.$;

3. Chú ý quan trọng :

$$f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}.$$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Xét dấu các tam thức :

a) $x^2 - 2x$; b) $x^2 - 1$; c) $3x^2 - 2x + 5$; d) $-2x^2 + 3x + 5$.

2. Xét dấu các biểu thức :

a) $A = (-x^2 + 2)(x^2 - 5x + 6)$; b) $B = \dfrac{x^2 + x - 3}{1 - 2x}$

c) $C = \dfrac{8 - x}{x + 1}$; d) $D = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. a) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $f(x) < 0, \forall x \in (0; 2)$

b) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$

c) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) > 0, \forall x \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$; $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

2. a) $A < 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (3; +\infty)$;

$A > 0, \forall x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (2; 3)$

b) $B < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $B > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

c) $C < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$; $C > 0, \forall x \in (-1; 8)$.

d) $D < 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $D > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất phương trình bậc hai (một ẩn) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ trong đó $f(x)$ là tam thức bậc hai (một biến).

2. Cách giải bất phương trình

Áp dụng định lí dấu của tam thức bậc hai xét dấu vế trái.

Chọn ra tập nghiệm thích hợp.

Biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Giải các BPT sau :

a) $x^2 - 5x < 0$; b) $3x - 2x^2 \geq 0$; c) $x^2 - 1 < 0$

d) $3 - x^2 \geq 0$; e) $3x^2 - 2x < 1$; f) $-2x^2 + 5x + 1 \geq 0$.

2. Giải các BPT sau :

a) $(2 - 3x + x^2)(x^2 + 3x - 1) \leq 0$;

b) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$; c) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{x - 2} < \dfrac{3}{x - 3}$;

d) $\dfrac{x - 2}{1 - x} + \dfrac{x - 3}{x + 1} > \dfrac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$; e) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{2x - x^2} > 0$.

3. Với các giá trị nào của m thì các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt ? vô nghiệm ?

a) $(m - 2)x^2 + 2mx - 3 + m = 0$; b) $(m + 3)x^2 - (m - 1)x + m = 0$.

4. Giải các hệ BPT

a) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x - 16 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - x^2 - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 + 4x \leq 0 \\ x^2 > 4 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}$

e) $1 < x^2 - 2x - 7 < 4$.

5. Với các giá trị nào của m thì các BPT sau vô nghiệm :

a) $-x^2 + 3m - 1 < 0$; b) $3x^2 - 2mx + m + 1 \leq 0$.

6. Với các giá trị nào của m thì các BPT sau nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $-3x^2 - 2mx + m + 1 < 0$; b) $4x^2 - 2(m - 2)x + m \geq 0$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. a) $T = (0; 5)$; b) $T = \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$; c) $T = (-1; 1)$;

d) $T = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$; e) $T = \left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$; f) $T = \left[\dfrac{5 - \sqrt{33}}{4}; \dfrac{5 + \sqrt{33}}{4}\right]$.

2. a) Lập bảng xét dấu vế trái

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+		+		+	0	−	0	+	
$x^2 + 3x - 1$		+	0	−	0	+		+		+	
VT		+		−		+	0	−	0	+	

Chọn ra tập nghiệm: $T = \left(\dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}; \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup [1; 2]$

b) Chuyển vế. Lập bảng xét dấu vế trái $T = (-\infty; 0) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

c) $T = (-\infty;\ 1) \cup \left(\dfrac{3}{2};2\right) \cup (3;\ +\infty)$

d) $T = [-5;\ -2] \cup (-1;\ 1)$

e) BPT đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{(x^2 - 1)(x - 3)}{2x - x^2} > 0$

$T = (-\infty;\ -1) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ 3)$.

3. a) $\Delta' = m^2 - (m - 2)(m - 3) = 5m - 6$

PT có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta' = 5m - 6 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{6}{5}$

PT vô nghiệm khi $m < \dfrac{6}{5}$

b) $\Delta = (m - 1)^2 - 4m(m + 3) = -3m^2 - 14m + 1$

PT có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 14m - 1 < 0$

$\Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{-7 - \sqrt{52}}{3};\dfrac{-7 + \sqrt{52}}{3}\right)$

PT vô nghiệm khi $m \in \left(-\infty;\dfrac{-7 - \sqrt{52}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{-7 + \sqrt{52}}{3};+\infty\right)$.

4. a) $T = \left(\dfrac{1}{2};4\right)$; b) $T = \left(-2;\dfrac{1}{3}\right) \cup (3;8)$

c) $T = (-\infty;\ 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2};\ +\infty)$; d) $T = [-4;\ -2)$

e) $T = (1 - 2\sqrt{3};\ -2) \cup (4;\ 1 + 2\sqrt{3})$.

5. a) BPT vô nghiệm khi và chỉ khi $x^2 + 3m - 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này không xảy ra.

b) BPT vô nghiệm khi và chỉ khi $3x^2 - 2mx + m + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Delta' = m^2 - 3(m + 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 3 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2} < m < \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}$.

6. a) BPT nghiệm đúng $\forall x \in R$ khi và chỉ khi

$-3x^2 - 2mx + m + 1 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Delta' = m^2 + 3(m + 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 3 < 0 \Leftrightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy không có m để bài toán thoả mãn.

b) BPT nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$4x^2 - 2(m - 2)x + m \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Delta' = (m - 2)^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow m \in [4 - 2\sqrt{3};\ 4 + 2\sqrt{3}]$.

§9. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PT và BPT chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Cách giải : Bỏ các dấu giá trị tuyệt đối, dựa vào định nghĩa

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

2. PT và BPT chứa ẩn trong dấu căn bậc hai

a) Giải PT dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- **ĐKXĐ** của PT : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
- Bình phương 2 vế : $f(x) = g^2(x)$
- Kết hợp với **ĐKXĐ**, chọn ra nghiệm

Công thức chung: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

b) Giải BPT dạng $\sqrt{f(x)} > g(x)$ (1)

- **ĐKXĐ** của BPT : $f(x) \geq 0$
- Xét 2 trường hợp đối với g(x)

+ Nếu $g(x) < 0$ thì BPT có nghiệm thoả mãn $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

+ Nếu $g(x) \geq 0$, bình phương 2 vế của (1) được $f(x) > g^2(x)$

BPT có nghiệm thoả mãn $\begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Hợp nghiệm của 2 trường hợp trên.

Công thức chung: $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

c) Giải BPT dạng $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (1)

ĐKXĐ của BPT : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Bình phương 2 vế, kết hợp với **ĐKXĐ** suy ra nghiệm của (1)

Công thức chung: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \leq f(x) < g^2(x) \end{cases}$

3.* PT trùng phương

a) PT trùng phương là PT có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

b) Cách giải : Đặt ẩn phụ $y = x^2$ $(y \geq 0)$

Đưa về PT bậc hai : $\begin{cases} ay^2 + by + c = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (2)

Chú ý

PT(1) chỉ có nghiệm khi PT (2) có nghiệm không âm.

PT(1) có nhiều nhất 4 nghiệm, nếu PT (2) có 2 nghiệm dương.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Giải các PT

a) $x^2 - |2x - 1| = 0$; b) $2x + 1 - |x| = 5$; c) $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$

d) $|x - 1| + |x| = 1$; e) $|x^2 - 1| = 2x + 1$.

2. Giải các BPT :

a) $|1 - 4x| \geq 2x + 1$; b) $x^2 - x|x + 1| \leq 3$

c) $|2x + 5| > |7 - 4x|$; d) $\dfrac{2x - 5}{|x - 3|} + 1 > 0$;

e) $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} > 1$ f) $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leq 1$.

3. Giải các phưởng trình

a) $\sqrt{x - 2} = 5$; b) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$

c) $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$; d) $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$.

4. Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{2x - 1} < x$; b) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$

c) $\sqrt{21 - 4x - x^2} - x - 3 < 0$; d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2$

e) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} > \sqrt{2x - 8}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. a) $x^2 - |2x - 1| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow T = \{-1 - \sqrt{2} ; -1 + \sqrt{2} ; 1\}$.

b) $T\{4\}$; c) $T = \left\{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$; d) $T = [0; 1]$; e) $T = \{0; 1+\sqrt{3}\}$.

2. a) $|1 - 4x| \geq 2x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - 4x \geq 2x + 1 \\ x \leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} 4x - 1 \geq 2x + 1 \\ x > \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty).$$

b) $x^2 + |x + 1| x - 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x(x+1) - 3 \leq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x(x+1) - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2} \leq x \leq -1 \\ x > -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow T = \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$$

c) $|2x + 5| > |7 - 4x| \Leftrightarrow (2x+5)^2 > (7 - 4x)^2 \Leftrightarrow (6x - 2)(-2x + 12) > 0$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 6) < 0 \Leftrightarrow T = \left(\frac{1}{3}; 6\right)$$

d) $$\frac{2x - 5}{|x - 3|} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2x-5}{3-x} + 1 > 0 \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2x-5}{3-x} + 1 > 0 \\ x > 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ x < \dfrac{8}{3}; x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow T(2;3) \cup (3; +\infty)$$

e) $T = \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

f) $$\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow T = \left[0; \frac{8}{5}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

3. a) $T = \{27\}$; b) $T = \{3\}$; c) $T = \{1; 3\}$;

d) Đặt $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = y \ (y \geq 0)$

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y - 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4.$

Giải $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4 \Leftrightarrow T = \{-7; 2\}$.

4. a) $\sqrt{2x-1} < x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow T = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right] \setminus \{1\}$

b) $T = (-\infty; -3) \cup \left(4; \frac{61}{3}\right]$; c) $T = [1; 3]$

d) $T = (-\infty; -2] \cup [14; +\infty)$; e) $T = [4; 5] \cup (6; 7]$.

§10. *Bài đọc thêm*[1]

ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU TAM THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí

- Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$

$$af(\alpha) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có 2 nghiệm } x_1 < x_2 \\ x_1 < \alpha < x_2 \end{cases}$$

2. So sánh một số α với các nghiệm của $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Tính $af(\alpha)$

+ Nếu $af(\alpha) = 0$ thì α là một nghiệm của $f(x)$

+ Nếu $af(\alpha) < 0$ thì $x_1 < \alpha < x_2$ (x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f(x)$)

+ Nếu $a.f(\alpha) > 0$ thì :

a) $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 < x_2$; b) $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \alpha$.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Tìm các giá trị m để các PT sau có nghiệm thoả mãn các điều kiện đã chỉ ra :

a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$; $x_1 < 3 < x_2$; $2 \leq x_1 < x_2$

b) $(m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0$; $-1 \leq x_1 < x_2$; $x_1 < x_2 < 2$.

2. Cho PT : $(3-m)x^2 - 2(2m-5)x - 2m + 5 = 0$

a) Tìm giá trị của m để $x_1 < 0 < x_2 < 1$

b) Tìm giá trị của m để PT có 2 nghiệm dương phân biệt.

3. Cho PT : $x^4 + 2mx^2 - m = 0$

a) Giải PT khi m = 2 ; b) Xác định m để PT vô nghiệm.

---

* Dùng cho HS ban Nâng cao.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. a) Để $x_1 < 3 < x_2$, cần và đủ là $f(3) = m^2 - 6m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6$

Để $2 \le x_1 < x_2$, cần và đủ là

$$\begin{cases} f(2) \ge 0 \\ \Delta > 0 \\ 2 < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 - \sqrt{6};\ m \ge 2 + \sqrt{6} \\ m > -\dfrac{3}{4} \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2 + \sqrt{6}$$

b) $-\dfrac{1}{3} < m < 0;\ m > 1$

$m < -\dfrac{5}{3};\ m > 1.$

2. a) Để $x_1 < 0 < x_2 < 1$, cần và đủ là :

$$\begin{cases} (3 - m)f(0) < 0 \\ (3 - m)f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 - m)(-2m + 5) < 0 \\ (3 - m)(-7m + 18) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{18}{87}$$

b) Để $0 < x_1 < x_2$, cần và đủ là :

$$\begin{cases} (3 - m)f(0) > 0 \\ \Delta' > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - m)(-2m + 5) > 0 \\ 2m^2 - 9m + 10 < 0 \\ \dfrac{2m - 5}{3 - m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm}$$

Không có m để bài toán thoả mãn

3. a) Khi $m = 2$ PT trở thành $x^4 + 4x^2 - 2 = 0$

Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$ có $\begin{cases} t^2 + 4t - 2 = 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2 + \sqrt{6}$

PT đã cho có 2 nghiệm : $x = \pm\sqrt{\sqrt{6} - 2}$

b) Đặt $x^2 = t\ (t \ge 0)$

Xét PT : $\begin{cases} t^2 + 2mt - m = 0\ (2) \\ t \ge 0 \end{cases}$

PT (2) vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} \Delta' = m^2 + m < 0 \\ \left.\begin{array}{l} \text{có nghiệm kép âm} \\ \text{có 2 nghiệm âm} \end{array}\right\} \text{không xảy ra;} \end{array}\right.$

Vậy $-1 < m < 0.$

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

I. BÀI TẬP

1. Giải và biện luận theo m

a) $m(1 - xm) \geq 1 - 2m$; b) $m^2x + 1 \leq x - m$.

2. Cho $f(x) = mx^2 + 2mx + 2m - 3$. Xác định m để

a) $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

b) $f(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu

c) $f(x) = 0$ có 2 nghiệm và 1 nằm trong khoảng 2 nghiệm

d) $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đều lớn hơn -2

e) $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < 0 < x_2 < 3$.

3. Cho PT : $(m - 1)x^4 - 2mx^2 + 1$ (1)

a) Giải PT(1) khi $m = 2$.

b) Xác định m để PT(1) có 4 nghiệm phân biệt.

4. Giải các BPT

a) $|x + 1| = |2x - 1|$; b) $\left|\dfrac{x}{x - 2}\right| \leq 1$

c) $|x^2 - 3x + 1| \geq 1$; d) $|x^2 - 1| + |x| \geq 2x - 1$

e) $\sqrt{2x - 3} < x + 1$; f) $2\sqrt{x^2 - x} - 1 \geq x$

g) $\sqrt{12 - x} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 5}$

h) $x - 3\sqrt{x + 1} + 3 > 0$ *(Thi Đại học Đà Nẵng – Khối D, 1997 – 1998)*;

i) $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 4} > \sqrt{x + 3}$ *(Thi Đại học Ngoại ngữ, 1997 – 1998)*;

k) $|x^2 + 3x - 4| - 2|x + 3| + 2 = 0$ *(Thi Đại học Huế, 1997 – 1998)*;

l) $2(1 - x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 2x - 1$ *(Thi Đại học Dược, 1997 – 1998)*

II. HƯỚNG DẪN GIẢI - TRẢ LỜI

1. Bạn đọc tự làm.

2. a) $0 < m < 3$; b) $0 < m < \dfrac{3}{2}$; c) $0 < m < \dfrac{3}{5}$

d) $m < 0$; $m > 3$; e) $\dfrac{3}{17} < m < \dfrac{3}{2}$.

3. a) $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$; b) $m > 1$.

4. a) $T = \{0; 2\}$; b) $T = (-\infty; 1]$; c) $T = (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.

d) $T = \left[\dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$; e) $T = \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$;

f) $T = \left(-\infty; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; g) $T = \{3\}$

h) $T = [-1; 0) \cup (3; +\infty)$; i) $T = \left[-3; \frac{-12+2\sqrt{3}}{3}\right]$;

k) $T = \left\{-4; \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right\}$;

l) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 1$ rồi thế vào PT đã cho
Giải ra $t = 2$; $t = -2x$.
$T = \{-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}\}$.

CHƯƠNG V

THỐNG KÊ

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong bảng phân bố ghép lớp ta có

a) Giá trị đại diện của lớp thứ i là số trung bình cộng của hai mút của lớp đó, kí hiệu là c_i.

b) Tần số của lớp thứ i là số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp đó.

c) Tần suất củalớp thứ i là $f_i = \frac{n_i}{n}$ với n_i là tần số của lớp đó, n là số các số liệu thống kê.

2. Chú ý :

+ Trong bảng phân bố tần suất thì tần suất được tính ở dạng tỉ số phần trăm.

+ Cột giá trị đại diện của các lớp có thể không có mặt nếu giá trị đại diện lớp không có nghĩa (không tính được).

VÍ DỤ

Cân kiểm tra sức khoẻ 40 học sinh của lớp 9A trường T ta được bảng số liệu thống kê sau : (đơn vị kg)

50	53	48	49	52	57	45	49	57	45
48	50	47	49	53	49	42	40	50	58
42	40	50	53	56	38	40	55	57	52
54	38	43	45	47	58	49	48	45	40

a) Hãy lập bảng phân bố tần số ghép lớp và bảng phân bố tần suất ghép lớp với các lớp.

[38 – 41); [41 – 44); [44 – 47); [47 – 50); [50 – 53) ; [53 – 56); [56 – 59]

b) Hãy cho biết có bao nhiêu phần trăm học sinh của lớp này nặng từ 44 kg đến dưới 53 kg.

- Bảng tần số ghép lớp

Lớp cân nặng (kg)	Giá trị đại diện	Tần số
[38 – 41)	39,5	6
[41 – 44)	42,5	3
[44 – 47)	45,5	5
[47 – 50)	48,5	10
[50 – 53)	51,5	5
[53 – 56)	54,5	5
[56 – 59]	57,5	6
		n = 40

- Bảng tần suất ghép lớp

Lớp cân nặng (kg)	Giá trị đại diện	Tần suất (%)
[38 – 41)	39,5	15,0
[41 – 44)	42,5	7,5
[44 – 47)	45,5	12,5
[47 – 50)	48,5	25,0
[50 – 53)	51,5	12,5
[53 – 56)	54,5	12,5
[56 – 59]	57,5	15,0
		n = 100%

Số phần trăm học sinh nặng từ 44 đến dưới 53 kg là

$$12,5\% + 25\% + 12,5\% = 50\%$$

(Là tổng các tần suất của các lớp thứ 3, thứ 4, thứ 5).

II. BÀI TẬP

1. Theo dõi 30 chuyến xe khách chạy từ Hà Nội đến Nam Định ta có thời gian chạy của xe (đơn vị phút) được ghi trong bảng số liệu thống kê sau :

110	115	115	90	120	110	90	95	115	120
115	120	95	105	85	90	75	80	90	125
125	110	90	95	90	100	95	120	100	110

a) Hãy lập bảng phân bố tần số ghép lớp và bảng tần suất ghép lớp với các lớp

[75 – 85); [85 – 95); [95 – 105) ; [105 – 115); [115 – 125]

b) Nếu thời gian chạy của xe là dưới 105 phút thì được coi là xe chạy nhanh. Hỏi có bao nhiêu phần trăm số xe ta theo dõi được coi là chạy nhanh ?

2. Cho mỗi học sinh lớp G ném bóng vào rổ trong 3 phút ta được số lần bóng ném trúng rổ lần lượt là :

15	12	20	16	17	18	10	6	8	3
17	8	19	18	5	19	15	9	14	12
21	20	13	15	11	9	14	2	4	11
12	17	15	23	10	12	18	16	14	13
10	12	9	15	11	14	13	15	16	14

a) Hãy lập bảng tần số và bảng tần suất ghép lớp của bảng số liệu thống kê trên với các lớp là :

[2 – 5); [5 – 8); [8 – 11); [11 – 14); [14 – 17); [17 – 20); [20 – 23]

b) Người nào có số lần ném trúng rổ dưới 11 lần là không đạt yêu cầu. Người nào có số lần ném trúng rổ từ 17 lần trở lên là ném tốt.

Hãy cho biết tỷ lệ phần trăm của số người ném không đạt yêu cầu và tỷ lệ phần trăm của số người ném tốt.

3. Theo dõi nhiệt độ của 36 bệnh nhân bị sốt do viêm phế quản ta có bảng số liệu sau (đơn vị ^{o}C):

38	38,5	38,3	39	39,4	39,5	38	38,7	39,2
39,3	38	38,4	38,6	39	39,3	38,2	40,2	38,6
37,8	39	38,7	39,1	39,5	39,4	39,2	39,9	38,7
38	39,2	38,6	37,8	38,2	39,8	40,6	38,5	38,8

a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng số liệu trên với các lớp là :

[37,8 – 38,2) ; [38,2 – 38,6) ; [38,6 – 39,0) ; [39,0 – 39,4) ; [39,4 – 39,8), [39,8 – 40,2) ; [40,2 – 40,6].

b) Hãy cho biết số người bị sốt từ 39,0^{o}C trở lên nhiều hơn hay số người bị sốt dưới 39,0^{o}C nhiều hơn.

4. Đo chiều cao cho 100 học sinh của trường A ta được bảng số liệu sau (đơn vị : cm)

Nam					Nữ				
170	175	168	165	159	160	152	172	154	155
172	173	167	165	160	163	154	173	153	159
179	168	170	164	176	165	163	165	154	163
180	169	158	155	157	161	147	169	167	175
154	157	153	167	173	167	142	170	169	160
162	153	152	161	170	168	148	150	152	154
165	148	150	167	182	157	154	152	170	157
171	153	142	159	157	163	153	163	176	161
145	167	158	169	168	170	169	159	175	167
167	165	171	174	167	166	163	161	154	168

a) Hãy lập bảng tần số ghép lớp; bảng tần suất ghép lớp theo chiều cao của nam và theo chiều cao của nữ thể hiện trên cùng một bảng với các lớp là :

[142 – 150) ; [150 – 158) ; [158 – 166) ; [166 – 174) ; [174 – 182].

b) Trong số những học sinh chưa cao tới 158 cm thì học sinh nam đông hơn hay học sinh nữ đông hơn ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Bảng tần số và tần suất ghép lớp

Lớp thời gian (phút)	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[75 – 85)	80	2	6,67
[85 – 95)	90	7	23,33
[95 – 105)	100	6	20,00
[105 – 115)	110	5	16,67
[115 – 125]	120	10	33,33
		n = 30	$\sum = 100\%$

b) Số phần trăm xe chạy dưới 105 phút là :

$$6{,}67\% + 23{,}33\% + 20{,}00\% = 50\%$$

Vậy có 50% số xe ta theo dõi được coi là chạy nhanh.

2. a) Bảng tần số và tần suất ghép lớp

Lớp số lần ném trúng	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[2 – 5)	3,5	3	6
[5 – 8)	6,5	2	4
[8 – 11)	9,5	8	16
[11 – 14)	12,5	11	22
[14 – 17)	15,5	14	28
[17 – 20)	18,5	8	16
[20 – 23]	21,5	4	8
		n = 50	$\sum$ 100%

b) Phần trăm số người ném trúng dưới 11 lần là : 16% + 4% + 6% = 26%

⇒ Có 26% số người ném không đạt yêu cầu.

Phần trăm số người ném trúng trên 17 lần là : 16% + 8% = 24%

⇒ Có 24% số người ném tốt.

3. a) Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Lớp nhiệt độ (^{0}C)	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[37,8 – 38,2)	38,0	6	16,667
[38,2 – 38,6)	38,4	6	16,667
[38,6 – 39,0)	38,8	7	19,444
[39,0 – 39,4)	39,2	9	25,000
[39,4 – 39,8)	39,6	4	11,111
[39,8 – 40,2)	40,0	2	5,556
[40,2 – 40,6]	40,4	2	5,556
		n = 36	$\sum = 100\%$

b) Ta có tỉ lệ phần trăm số người bị sốt từ 39,0^{0}C trở lên là

$$25\% + 11,111\% + 5,556\% + 5,556\% = 47,223\%$$

=> Tỉ lệ người sốt dưới 39,0^{0}C là 52,777%

Vậy số người bị sốt từ 39,0^{0}C trở lên ít hơn số người bị sốt dưới 39,0^{0}C.

4. a) Bảng tần số ghép lớp theo nam và theo nữ là :

Lớp chiều cao (cm)	Giá trị đại diện	Tần số	
		Nam	Nữ
[142 – 150)	146	3	3
[150 – 158)	154	10	15
[158 – 166)	162	12	15
[166 – 174)	170	19	14
[174 – 182]	178	6	3
		$n_1 = 50$	$n_2 = 50$

Bảng tần suất ghép lớp theo nam và theo nữ là :

Lớp chiều cao (cm)	Giá trị đại diện	Tần suất %	
		Nam	Nữ
[142 – 150)	146	6	6
[150 – 158)	154	20	30
[158 – 166)	162	24	30
[166 – 174)	170	38	28
[174 – 182]	178	12	6
		$\sum = 100\%$	$\sum = 100\%$

b) Ta có tần số của số học sinh nam cao dưới 158 cm là 3 + 10 = 13.

Ta có tần số của số học sinh nữ cao dưới 158 cm là 3 + 15 = 18.

=> Trong số những người cao dưới 158 cm thì học sinh nữ đông hơn.

§2. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ – TẦN SUẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các loại biểu đồ

a) Biểu đồ tần số hình cột :

Được vẽ trên mặt phẳng toạ độ, bao gồm các hình chữ nhật có một cạnh nằm trên trục hoành thể hiện một lớp trong bảng số liệu ghép lớp, cạnh kia vuông góc với trục hoành thể hiện tần số tương ứng của lớp.

b) Biểu đồ tần suất hình cột.

Khi thay cạnh thể hiện tần số của hình chữ nhật trên bằng tần suất % thì ta có biểu đồ tần suất hình cột.

Chú ý : Khi vẽ biểu đồ hình cột ta thường vẽ thêm đường gấp khúc tần số (hoặc tần suất). Đấy là đường gấp khúc được kẻ qua các điểm có toạ độ (c_i, n_i) hoặc (c_i, f_i%) với c_i là giá trị đại diện lớp i ; n_i là tần số của lớp i, f_i% là tần suất của lớp i.

c) Biểu đồ hình quạt :

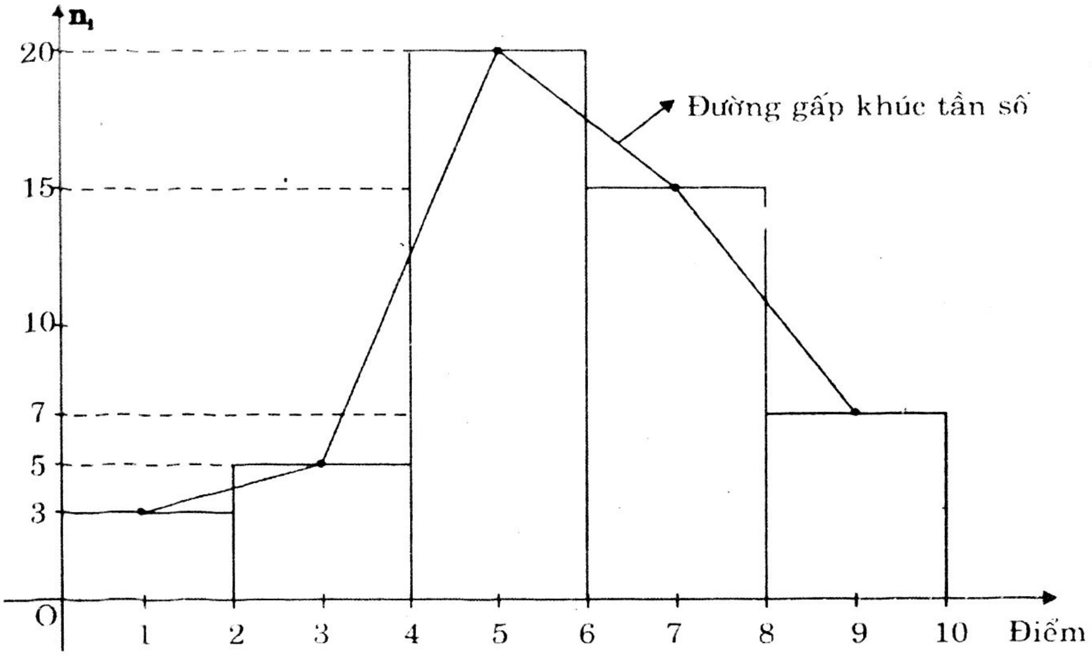
Được vẽ trên một hình tròn. Mỗi hình quạt có trên hình tròn thể hiện một tỷ trọng % của một lớp số liệu có trong bảng phân bố ghép lớp.

2. Ta phải đọc được nội dung mà biểu đồ tần số, tần suất hình cột, biểu đồ hình quạt thể hiện.

Ví dụ 1. Cho bảng phân bố ghép lớp về điểm kiểm tra của 50 học sinh lớp A là:

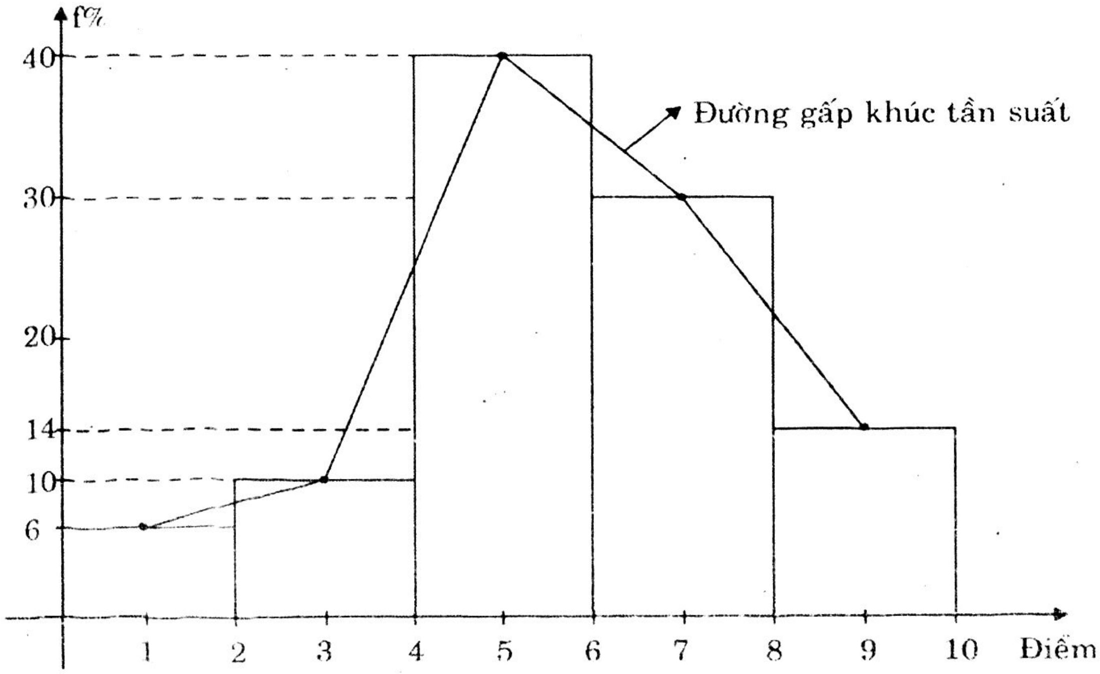
Lớp điểm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[0 – 2)	1	3	6
[2 – 4)	3	5	10
[4 – 6)	5	20	40
[6 – 8)	7	15	30
[8–10]		7	14
		n =50	$\sum$ = 100%

a) Ta có biểu đồ tần số hình cột



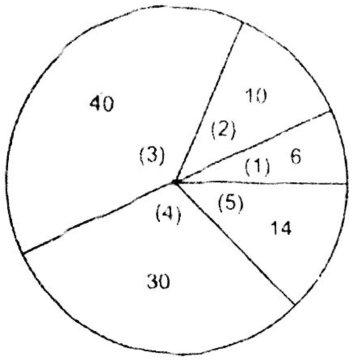
Hình 46

b) Biểu đồ tần suất hình cột



Hình 47

c) Biểu đồ hình quạt



(1) Điểm trong khoảng [0, 2)
(2) Điểm trong khoảng [2, 4)
(3) Điểm trong khoảng [4, 6)
(4) Điểm trong khoảng [6, 8)
(5) Điểm trong khoảng [8, 10]

Hình 48

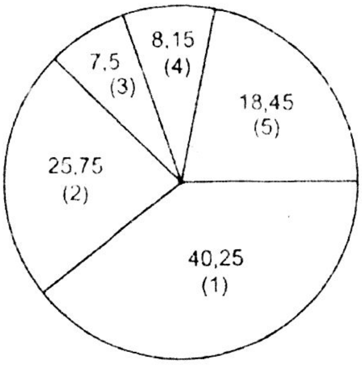
d) Dựa vào biểu đồ tần suất ta có nhận xét :

– Chiếm tỉ lệ thấp nhất là số học sinh đạt điểm từ 0 đến dưới 2.

– Chiếm tỉ lệ cao nhất là số học sinh đạt điểm từ 4 đến dưới 6.

– Đa số học sinh (70%) đạt điểm từ 4 đến dưới 8.

Ví dụ 2. Cho sơ đồ hình quạt thể hiện sự tiêu thụ các loại thịt của dân thà phố T (tính theo tỉ lệ phần trăm)



(1) Thịt lợn
(2) Thịt bò
(3) Thịt vịt
(4) Thịt ngan
(5) Thịt gà

Hình 49

– Từ sơ đồ hình quạt ta có bảng phân bố về sự tiêu thụ các loại thịt của d thành phố T như sau :

Các loại thịt bán ra	Tỉ trọng tiêu thụ (%)
Thịt lợn	40,25
Thịt bò	25,75
Thịt vịt	7,50
Thịt ngan	8,15
Thịt gà	18,45
	$\sum = 100\%$

Tỉ trọng trong bài toán này được hiểu là :

Ví dụ :

$$\text{Tỉ trọng \% thịt lợn} = \frac{\text{Số kg thịt lợn bán được}}{\text{Tổng số kg các loại thịt trên bán được}} \times 100\%$$

II. BÀI TẬP

1. Từ bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bài tập 1, §1. hãy vẽ bi đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số. Hãy vẽ biểu đồ tần suất hì cột và đường gấp khúc tần suất.

2. Từ bảng phân bố tần suất lập theo chiều cao của học sinh nam và học si nữ trong bài tập 4, §1 hãy vẽ trên 1 hệ trục toạ độ hai đường tần suất g khúc của chiều cao học sinh nam và chiều cao học sinh nữ.

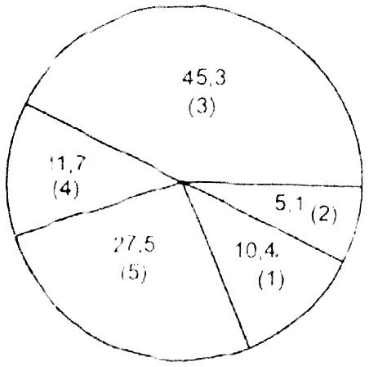
– Dựa vào hai đường gấp khúc tần suất vẽ được ở trên hãy so sánh các phân bố theo chiều cao của học sinh nam và học sinh nữ.

3. Tình hình tham gia các hoạt động hè của thiếu niên phường T được ghi trong bảng phân bố ghép lớp sau :

Các hoạt động	Số người tham gia
Thể dục	30
Văn nghệ	25
Cả thể dục + văn nghệ	20
Không tham gia gì	5
	$\sum = 80$

Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột cho bảng số liệu trên.

4. Cơ cấu phân loại học sinh ở một huyện miền núi được cho trong biểu đồ hình quạt sau :



(1) Học sinh giỏi
(2) Học sinh khá
(3) Học sinh trung bình
(4) Học sinh yếu
(5) Học sinh kém

Hình 50

a) Từ biểu đồ trên hãy lập bảng phân bố trình bày cơ cấu phân loại học sinh của huyện này.

b) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột minh hoạ.

5. Thống kê về trình độ văn hoá của một công ty ta có kết quả sau :

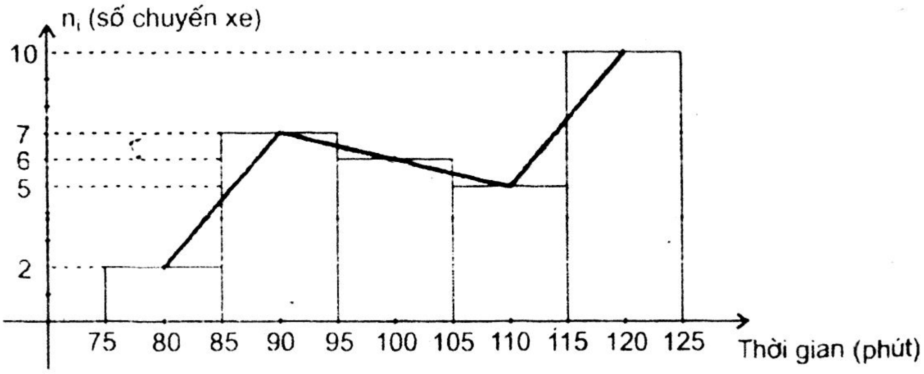
Lớp trình độ văn hoá	Số người
Tiểu học cơ sở	15
Trung học cơ sở	55
Trung học phổ thông	150
Tốt nghiệp đại học	25
Thạc sĩ	5
	$\sum = 250$

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất cho bảng số liệu trên rồi vẽ biểu đồ tần suất minh hoạ.

b) Hãy vẽ biểu đồ hình quạt thể hiện tỉ lệ phần trăm về trình độ văn hoá của cán bộ trong công ty.

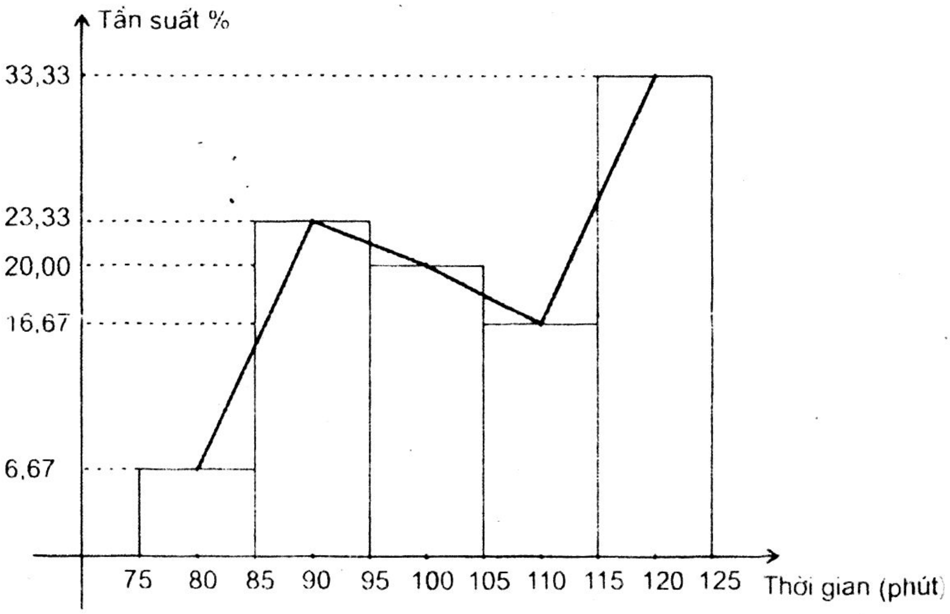
HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số



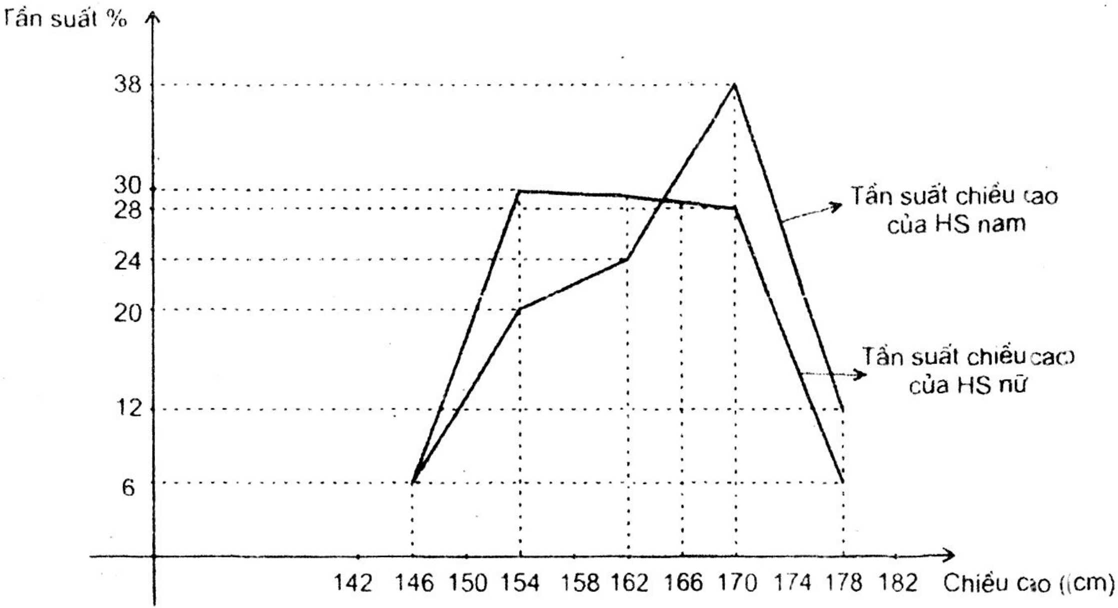
Hình 51

Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất :



Hình 52

2. Đường gấp khúc tần suất của 50 học sinh nam, 50 học sinh nữ.



Hình 53

b) Ta nhận thấy :

– Với chiều cao dưới 166 cm thì tỉ lệ học sinh nữ nhiều hơn.

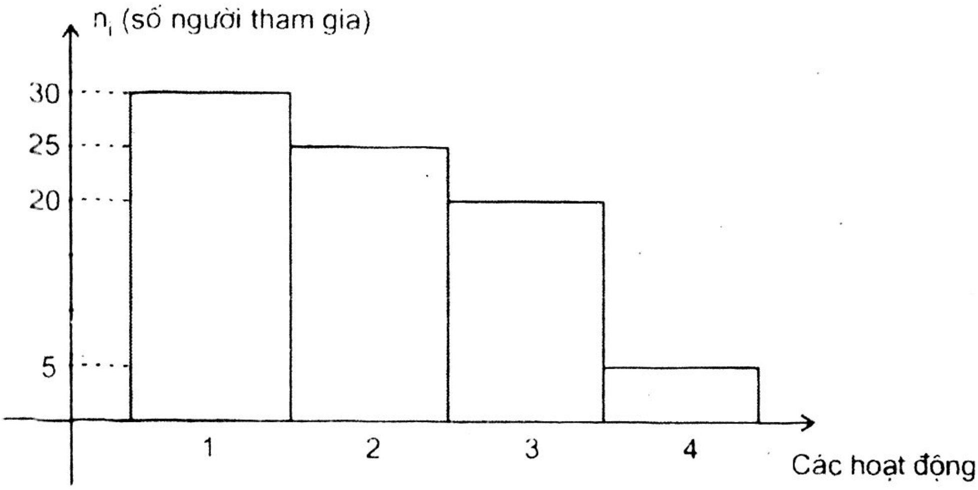
– Với chiều cao trên 166 cm thì tỉ lệ học sinh nam nhiều hơn.

3. 1. Hoạt động thể dục

2. Hoạt động văn nghệ

3. Hoạt động cả thể dục và văn nghệ

4. Không tham gia gì.



Hình 54

4. Bảng phân bố tần suất ghép lớp phân loại học sinh:

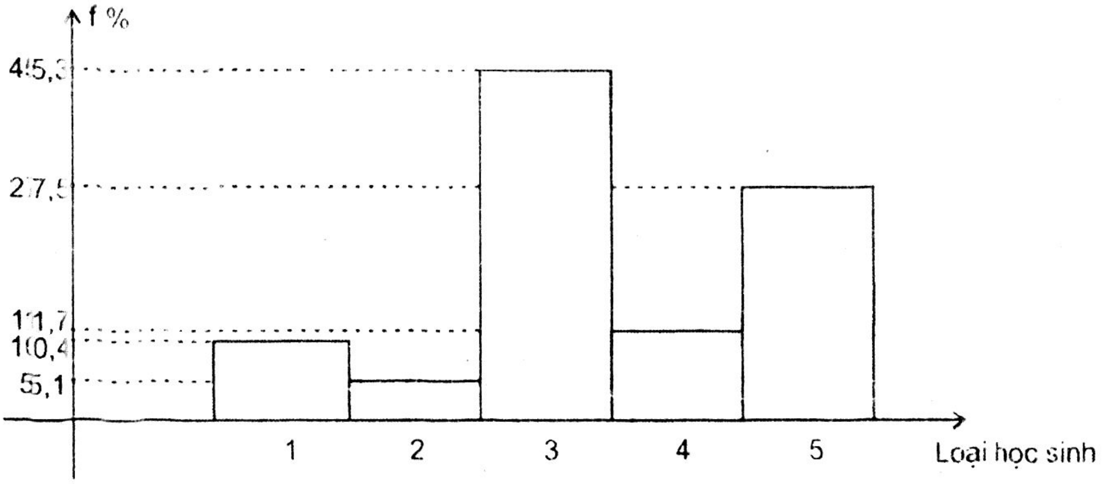
Lớp phân loại	Tần suất (Tỉ trọng) %
Học sinh giỏi	10,4
Học sinh khá	5,1
Học sinh trung bình	45,3
Học sinh yếu	11,7
Học sinh kém	27,5
	$\sum = 100\%$

- Biểu đồ tần suất hình cột

1. Học sinh giỏi 2. Học sinh khá

3. Học sinh trung bình 4. Học sinh yếu

5. Học sinh kém



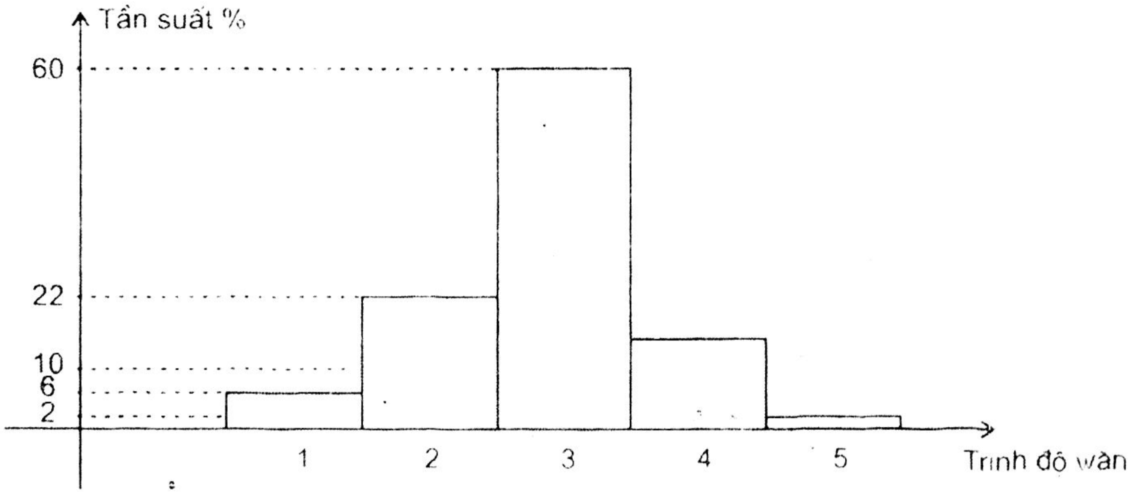
Hình 55

5. Bảng phân bố tần suất:

Trình độ văn hoá	Tần suất %
Tiểu học	6
Trung học cơ sở	22
Trung học phổ thông	60
Tốt nghiệp đại học	10
Thạc sĩ	2
	$\sum = 100\%$

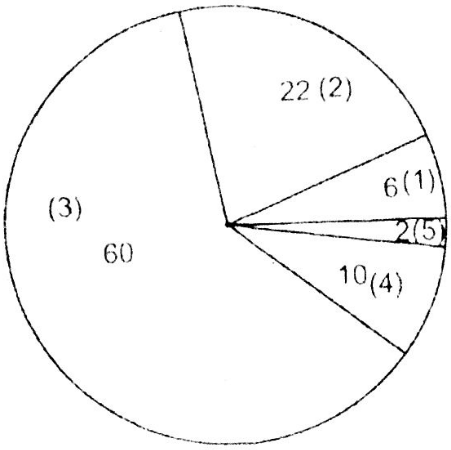
- Biểu đồ tần suất hình cột

1. Tiểu học cơ sở
2. Trung học cơ sở
3. Trung học phổ thông
4. Tốt nghiệp đại học
5. Thạc sĩ



Hình 56

- Biểu đồ hình quạt



(1) Tiểu học
(2) Trung học cơ sở
(3) Trung học phổ thông
(4) Tốt nghiệp đại học
(5) Thạc sĩ

Hình 57

§3. SỐ TRUNG BÌNH – SỐ TRUNG VỊ – MỐT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số trung bình

Công thức tính :

a) Với bảng phân bố tần số $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i.n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i.f_i$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i, n là số các số liệu thống kê.

b) Với bảng phân bố ghép lớp ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i.n_i = \sum_{i=1}^{k} c_i.f_i$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + ... + n_k$).

2. Số trung vị (Median)

Số trung vị Me của một dãy số liệu thống kê không giảm (hoặc không tăng, gồm n số liệu là :

- Số đứng giữa dãy nếu n lẻ.
- Trung bình cộng của 2 số đứng giữa dãy nếu n chẵn.

3. Mốt

- Mốt Mo là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.
- Nếu trong bảng phân bố tần số có hai giá trị đứng cạnh nhau có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì ta lấy mốt Mo là trung bình cộng của hai giá trị đó.
- Trong trường hợp 2 giá trị nói trên không đứng cạnh nhau thì dãy số liệu có 2 mốt.
- Một bảng số liệu có thể có nhiều mốt.

4. Chọn đại diện cho số liệu thống kê

- Trong trường hợp có nhiều số liệu thống kê cùng loại ta thường chọn số trung bình làm đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.
- Có những trường hợp số trung vị hoặc mốt được chọn làm đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn. Đó là khi ta không tính được giá trị trung bình, hoặc số liệu thống kê quá ít ($n \leq 10$), hoặc giữa các số liệu thống kê có sự chênh lệch nhau quá lớn hoặc đường gấp khúc tần suất rất không đối xứng.

Ví dụ 1.

Ta có bảng phân bố tần số về điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10A là (xem bảng bên).

a) Tính điểm trung bình đạt được của học sinh lớp 10A.

b) Lớp 10B có điểm kiểm tra trung bình là 6,56. Hỏi lớp nào học khá hơn.

c) Tìm số trung vị và mốt của bảng số liệu trên.

Điểm x_i	Số bài đạt n_i
2	3
4	7
5	15
6	12
7	10
8	9
10	6
	n = 62

Giải. – Ta có điểm trung bình của lớp 10A là :

$$\overline{x}_A = \frac{1}{62}(2 \times 3 + 4 \times 7 + 5 \times 15 + 6 \times 12 + 7 \times 10 + 8 \times 9 + 10 \times 6)$$

$$= \frac{383}{62} = 6,18.$$

– Ta có điểm kiểm tra trung bình của lớp 10B là $\overline{x}_B = 6,56 \Rightarrow \overline{x}_B > \overline{x}_A$

$\Rightarrow$ lớp 10B học khá hơn lớp 10A.

– Số trung vị Me = 6.

– Mốt Mo = 5.

Ví dụ 2. Ta có bảng xếp loại học lực của học sinh xã G như sau :

a) Tính các số đặc trưng của bảng số liệu là : số trung bình, mốt, số trung vị.

b) Chọn giá trị đại diện cho bảng số liệu thống kê trên về quy mô và độ lớn.

Học lực	Tần số
Giỏi	10
Khá	30
Trung bình	70
Yếu	24
Kém	8
	n = 142

Giải. Số trung bình không tính được vì không có nghĩa.

Mốt = số trung vị = học lực trung bình.

Vậy giá trị đại diện cho bảng số liệu thống kê trên về quy mô và độ lớn là học lực trung bình.

III. BÀI TẬP

1. Tính các số trung bình của các bảng số liệu cho trong bài tập 1 và 2. Nêu ý nghĩa của các số trung bình đó.

2. Cho bảng xếp loại lao động của một cơ quan

a) Hãy tính số trung bình, trung vị và mốt của bảng số liệu trên.

b) Hãy chọn giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.

Loại lao động	Tần số
Loại A	25
Loại B	29
Loại C	35
Loại D	35
Loại E	27
Loại G	28

3. Khảo sát về tiền lương hàng tháng của một cơ sở sản xuất ta có bảng số liệu sau (đơn vị triệu đồng Việt Nam)

a) Hãy tính số trung bình, mốt và số trung vị.

b) Hãy chọn giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô, độ lớn.

Tiền lương	Tần số
≤ 0,5	20
0,6	70
0,8	75
1,0	80
1,3	120
1,4	120
1,5	90
1,6	73
1,7	60
≥ 1,8	15

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Theo bảng số liệu của bài tập 1, §1 ta có

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(80 \times 2 + 90 \times 7 + 100 \times 6 + 110 \times 5 + 120 \times 10) = 104,7$$

- Suy ra thời gian chạy trung bình từ Hà Nội đến Nam Định của các chuyến xe khách là 104,7 phút.

Theo bảng số liệu của bài tập 2, §1 ta có

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(3,5 \times 6 + 6,5 \times 4 + 9,5 \times 16 + 12,5 \times 22$$

$$+ 15,5 \times 28 + 18,5 \times 16 + 21,5 \times 8) = 13,76$$

- Suy ra trung bình mỗi người ném bóng trúng rổ khoảng 14 lần trong 3 phút.

2. a) Số trung bình không tính được vì không có nghĩa.

- Ta có n = 179 là số lẻ ⇒ Số trung vị Me chính là số đứng ở vị trí chính giữa của dãy số liệu. Đấy là giá trị ứng với vị trí 90 của dãy.

Vậy có Me = lao động loại D.

- Trong bảng số liệu này ta có 2 mốt là loại C và loại D.

b) Theo kết quả trên ta lấy giá trị lao động loại D làm giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.

3. Số trung bình không tính được vì với tiền lương ≤ 0,5 triệu và ≥ 1,8 triệu ta không xác định được giá trị cụ thể.

– Mốt Mo = $\frac{1}{2}(1,3 + 1,4) = 1,35$ triệu.

– Ta có số liệu thống kê n = 723.

⇒ Giá trị đứng ở vị trí 362 chính giữa dãy số liệu là Me = 1,3.

b) Theo trên ta có giá trị 1,3 triệu đồng là giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.

§4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách tính phương sai :

a) Theo bảng tần số rời rạc : $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 n_i$.

b) Theo bảng tần suất rời rạc : $S^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 f_i$ với $f_i = \frac{n_i}{n}$.

c) Theo bảng ghép lớp tần số : $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(c_i - \overline{X})^2 n_i$

d) Theo bảng ghép lớp tần suất : $S^2 = \sum_{i=1}^{k}(c_i - \overline{X})^2 f_i$

e) Dùng công thức $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i \; ; \; \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i$$

- *Chú ý :* Dùng công thức (e) tính nhanh hơn và chính xác hơn.

2. Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê so với giá trị trung bình của chúng.
- Khi hai dãy số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có cùng giá trị trung bình (hoặc 2 giá trị trung bình xấp xỉ bằng nhau) ta có phương sai nào càng bé thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng bé.

3. Độ lệch tiêu chuẩn

- Độ lệch tiêu chuẩn S là căn bậc hai của S^2. $S = \sqrt{S^2}$.
- Độ lệch tiêu chuẩn cũng dùng để đánh giá mức độ phân tán (so với giá trị trung bình của chúng).

- *Chú ý :* Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với dấu hiệu đang được nghiên cứu.

Ví dụ 1. Lương hàng tháng của cán bộ trong cơ quan A được thống kê trong bảng số liệu sau : (đơn vị tính : triệu Việt Nam đồng).

Lớp tiền lương	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[0,4 – 0,6)	0,5	5	9,6
[0,6 – 0,8)	0,7	4	7,7
[0,8 – 1,0)	0,9	6	11,5
[1,0 – 1,2)	1,1	10	19,2
[1,2 – 1,4)	1,3	15	28,9
[1,4 – 1,6)	1,5	4	7,7
[1,6 – 1,8)	1,7	5	9,6
[1,8 – 2,0)	1,9	3	5,8
		n = 52	∑ = 100%

a) Tính phương sai

• Dùng công thức $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(c_i - \bar{X})^2 n_i$

$$\bar{X} = \frac{1}{52}(0{,}5 \times 5 + 0{,}7 \times 4 + 0{,}9 \times 6 + 1{,}1 \times 10 +$$

$$+ 1{,}3 \times 15 + 1{,}5 \times 4 + 1{,}7 \times 5 + 1{,}9 \times 3) = \frac{61{,}4}{52} = 1{,}18$$

$$S^2 = \frac{1}{52}[(0{,}5 - 1{,}18)^2 \times 5 + (0{,}7 - 1{,}18)^2 \times 4 + (0{,}9 - 1{,}18)^2 \times 6 +$$

$$+ (1{,}1 - 1{,}18)^2 \times 10 + (1{,}3 - 1{,}18)^2 \times 15 + (1{,}5 - 1{,}18)^2 \times 4 +$$

$$+ (1{,}7 - 1{,}18)^2 \times 5 + (1{,}9 - 1{,}18)^2 \times 3]$$

$$S^2 = \frac{1}{52}(2{,}31 + 0{,}92 + 0{,}47 + 0{,}06 + 0{,}22 + 0{,}41 + 1{,}35 + 1{,}56)$$

$S^2 = 0{,}14.$

Ví dụ 2. Dùng công thức $S^2 = \sum_{i=1}^{k}(c_i - \bar{X})^2 f_i$

Ta đã có $\bar{X} = 1{,}18$ và $f_i\%$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{100}[0{,}5 - 1{,}18)^2 \times 9{,}6 + (0{,}7 - 1{,}18)^2 \times 7{,}7 + (0{,}9 - 1{,}18)^2 \times 11{,}5$$

$$+ (1{,}1 - 1{,}18)^2 \times 19{,}2 + (1{,}3 - 1{,}18)^2 \times 28{,}9 + (1{,}5 - 1{,}18)^2 \times 7{,}7 +$$

$$+ (1{,}7 - 1{,}18)^2 \times 9{,}6 + (1{,}9 - 1{,}18)^2 \times 5{,}8]$$

$$S^2 = \frac{1}{100}(4{,}44 + 1{,}77 + 0{,}90 + 0{,}12 + 0{,}42 + 0{,}79 + 2{,}60 + 3{,}01)$$

$$S^2 = \frac{1}{100} \times 14{,}05$$

$S^2 = 0,14$.

Ví dụ 3. Dùng công thức $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$. Ta có $(\overline{X})^2 = 1,39$.

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} C_i^2 n_i = \frac{1}{52}(0,5^2 \times 5 + 0,7^2 \times 4 + 0,9^2 \times 6 +$$

$$+ 1,1^2 \times 10 + 1,3^2 \times 15 + 1,5^2 \times 4 + 1,7^2 \times 5 + 1,9^2 \times 3)$$

$$= \frac{1}{52}(1,25 + 1,96 + 4,86 + 12,1 + 25,35 + 9 + 14,45 + 10,83)$$

$$= \frac{1}{52} \times 79,8 = 1,54.$$

$\Rightarrow S^2 = 1,54 - 1,39 = 0,15$.

- *Chú ý :* Dùng công thức $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ tính nhanh hơn và kết quả chính xác hơn.

b) Độ lệch tiêu chuẩn $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,15} \Rightarrow S = 0,387$.

c) Nếu có lương trung bình của cán bộ cơ quan B cũng là 1,18 triệu và phương sai là 0,3 thì ta có nhận xét : Mức lương của cán bộ 2 cơ quan là như nhau, nhưng sự chênh lệch về tiền lương của cán bộ cơ quan A (so với mức lương trình bình) ít hơn.

Điều này cũng có nghĩa là cán bộ cơ quan A được trả lương đồng đều nhau hơn

II. BÀI TẬP

1. Từ bảng phân bố tần số ghép lớp theo chiều cao của nam và nữ trong bài tập 4, §1 hãy tính :

a) Số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của số liệu thống kê về chiều cao của nam.

b) Số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của số liệu thống kê về chiều cao nữ.

c) Hãy cho biết chiều cao của các bạn nam đồng đều nhau hơn hay chiều cao của các bạn nữ đồng đều nhau hơn.

2. Cho 40 bạn nam và 40 bạn nữ ném bóng vào rổ ta được số lần ném bóng trúng rổ được cho trong 2 bảng sau :

Nam	
Số lần ném trúng	Tần số
12	5
17	6
20	10
24	8
25	7
30	3
32	1
	n = 40

Nữ	
Số lần ném trúng	Tần số
10	3
14	8
17	6
20	5
23	4
25	5
27	6
28	3
	n = 40

a) Hãy tính giá trị trung bình và phương sai của 2 bảng số liệu trên.

b) Hãy cho biết bên nào ném bóng tốt hơn ? Bên nào ném bóng đều tay hơn ?

3. Hai bạn A và B thi bắn mỗi người 30 lần và được kết quả về điểm số như sau :

A		B	
Điểm	Số lần đạt	Điểm	Số lần đạt
5	3	6	2
7	6	7	5
8	12	8	10
9	7	9	12
10	2	10	1

a) Hãy tính giá trị trung bình, phương sai và độ lệch tiêu chuẩn của 2 bảng số liệu trên.

b) Hãy cho biết ai bắn tốt hơn ? Ai bắn chuẩn hơn ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. • Chiều cao trung bình của nam : $\overline{X}_{nam} = 164,40$

– Phương sai $S^2_{nam} = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2 = 27104,8 - 27027,36 = 77,44$

– Độ lệch tiêu chuẩn $S_{nam} = \sqrt{77,44} = 8,8$

• Chiều cao trung bình của nữ : $\overline{X}_{nữ} = 161,84$

– Phương sai $S^2_{nữ} = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2 = 26260 - 26192,19 = 67,81$

– Độ lệch tiêu chuẩn $S_{nữ} = \sqrt{67,81} = 8,24$

• Vì có $S^2_{nam} > S^2_{nữ}$ nên ta có thể kết luận là chiều cao của các bạn nữ đồng đều nhau hơn.

2. Số lần ném trúng trung bình của các bạn nam

$$\overline{X}_{nam} = \frac{1}{40}(12 \times 5 + 17 \times 6 + 20 \times 10 + 24 \times 8 + 25 \times 7 + 30 \times 3 + 32 \times 1)$$

$$= 21,28.$$

– Phương sai $S^2_{nam} = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2$

Với $\overline{X}^2 = \frac{1}{40}(12^2 \times 5 + 17^2 \times 6 + 20^2 \times 10$

$+ 24^2 \times 8 + 25^2 \times 7 + 30^2 \times 3 + 32^2 \times 1 = 479,03$

$\Rightarrow S^2_{nam} = 479,03 - 21,28^2 = 26,19$

• Số lần ném trúng trung bình của các bạn nữ

$$\overline{X}_{nữ} = \frac{1}{40}(10 \times 3 + 14 \times 8 + 17 \times 6 + 20 \times 5$$

$$+ 23 \times 4 + 25 \times 5 + 27 \times 6 + 28 \times 3) = 20,18$$

– Phương sai $S^2_{\text{nữ}} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

Với $\overline{X^2} = \frac{1}{40}(10^2 \times 3 + 14^2 \times 8 + 17^2 \times 6 + 20^2 \times 5 +$

$+ 23^2 \times 4 + 25^2 \times 5 + 27^2 \times 6 + 28^2 \times 3) = 474,3$

$\Rightarrow S^2_{\text{nữ}} = 474,3 - 20,18^2 = 67,07$

- Vì có $\overline{X}_{\text{nam}} > \overline{X}_{\text{nữ}}$ nên ta có thể kết luận bên nam ném bóng tốt hơn.
- Vì có $S^2_{\text{nữ}} > S^2_{\text{nam}}$ nên ta kết luận bên nam ném bóng đều tay hơn.

3. Điểm trung bình của bạn A : $\overline{X}_A = 7,87$.

– Phương sai $S^2_A = 1,53$.

– Độ lệch tiêu chuẩn $S_A = \sqrt{1,53} = 1,24$.

- Điểm trung bình của bạn B : $\overline{X}_B = 8,17$.

– Phương sai $S^2_B = 0,88$.

– Độ lệch tiêu chuẩn $S_B = \sqrt{0,88} = 0,94$.

- Ta có $\overline{X}_A < \overline{X}_B \Rightarrow$ bạn B bắn tốt hơn bạn A.

Ta có $S^2_B < S^2_A \Rightarrow$ bạn B bắn chụm hơn bạn A.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

1. Quan sát một hàng bán bánh ga tô trong thời gian 100 ngày ta được bảng số liệu ghi số bánh bán được trong từng ngày như sau :

15	5	25	29	30	47	54	51	45	64
20	10	32	28	34	46	53	49	55	62
35	12	26	33	34	48	54	49	58	64
23	8	29	31	27	48	51	53	60	59
38	14	40	42	44	50	46	52	63	57
40	20	37	38	36	53	47	46	51	56
55	24	42	44	43	63	64	62	65	67
68	23	38	37	44	54	70	45	69	73
70	18	45	48	48	66	69	45	72	70
75	17	50	52	49	53	58	64	71	75

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp với các lớp

[5 – 15) ; [15 – 25) ; [25 – 35) ; [35 – 45) ; [45 – 55) ; [55 – 65) ; [65 – 75).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số.

c) Nêu nhận xét về số bánh ga tô bán được trong 100 ngày ấy.

d) Hãy cho biết trung bình mỗi ngày cửa hàng bán được bao nhiêu chiếc bánh. Cho biết độ phân tán của số bánh bán được mỗi ngày so với số bánh trung bình bán được.

2. Cho bảng số liệu về cân nặng của học sinh hai lớp 10A và 10B của một trường.

Lớp cân nặng	Tần số	
	10A	10B
[33 - 39)	1	2
[39 - 45)	6	5
[45 - 51)	15	18
[51 - 57)	20	14
[57 - 63)	8	12
[63 - 69)	3	5
[69 - 75)	0	2
	$n_1 = 53$	$n_2 = 58$

a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ hai đường gấp khúc tần suất của cân nặng học sinh 2 lớp trên và từ đó cho biết những người nặng từ 60 kg trở lên lớp nào chiếm tỉ lệ cao hơn.

b) Hãy cho biết những người nặng dưới 57 kg lớp nào có tỉ lệ thấp hơn ?

c) Hãy tính giá trị trung bình, độ lệch tiêu chuẩn theo số liệu của từng lớp.

Lớp nào có cân nặng cao hơn ?

Lớp nào có cân nặng đều nhau hơn ?

3. Ta có bảng phân bố khối lượng của 75 quả xoài hái từ một cây là :

Khối lượng (gam)	Số quả
120	2
125	5
130	4
135	6
140	10
145	15
150	8
155	7
160	6
165	7
170	5

a) Hãy tính giá trị trung bình, mốt, số trung vị.

b) Hãy chọn giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.

c) Hái quả từ cây xoài thứ hai ta tính được giá trị trung bình của khối lượng là $\overline{X}_2 = 147$ gam ; độ lệch tiêu chuẩn $S_2 = 10,24$.

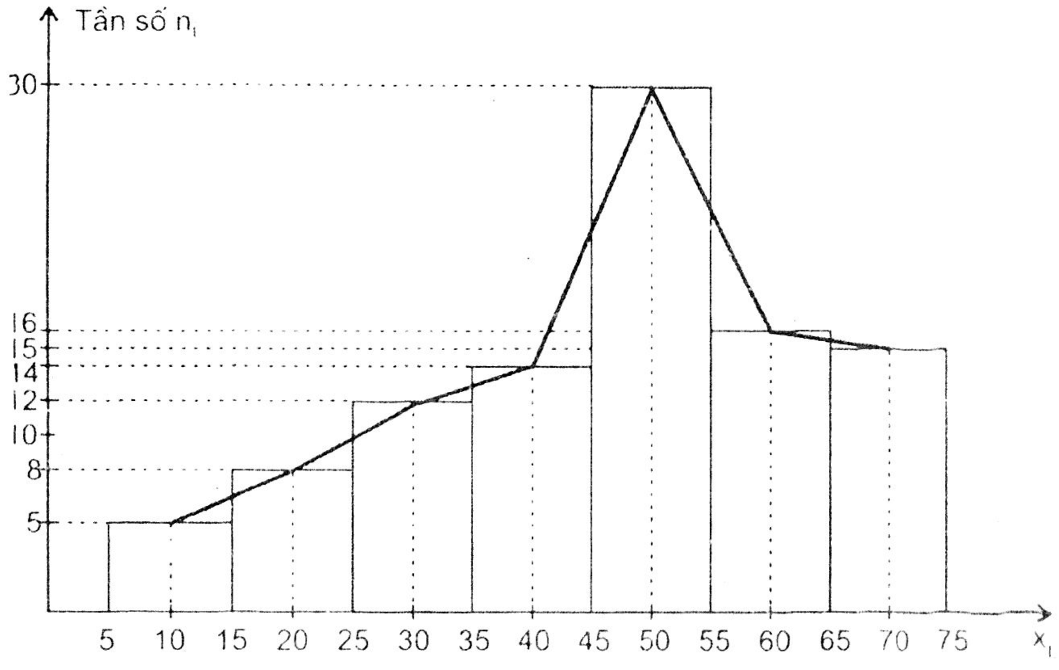
Hãy cho biết khối lượng quả xoài của cây nào đồng đều nhau hơn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Bảng tần số và tần suất ghép lớp

Lớp số bánh bán được	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất %
[5 – 15)	10	5	5
[15 – 25)	20	8	8
[25 – 35)	30	12	12
[35 – 45)	40	15	15
[45 – 55)	50	30	30
[55 – 65)	60	16	16
[65 – 75]	70	14	14
		n = 100	$\sum = 100\%$

b) Biểu đồ



Hình 58

c) *Nhận xét :*

– Số ngày bán được từ 45 đến 55 bánh ga tô chiếm tỉ lệ cao nhất (30%).

– Số ngày bán được từ 5 đến 15 bánh ga tô chiếm tỉ lệ thấp nhất (5%).

– Có 75% số ngày bán được từ 35 đến 75 chiếc bánh.

d) Số bánh bán được trung bình trong mỗi ngày chính là giá trị trung bình của bảng số liệu thống kê.

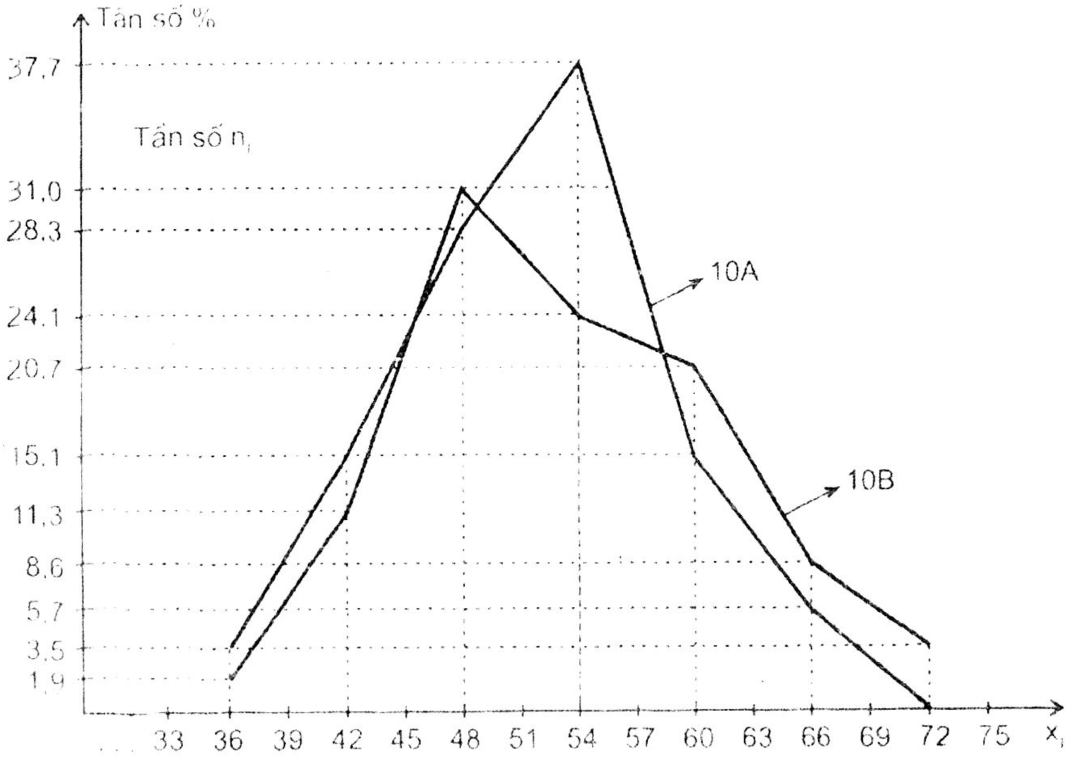
$$X = 46{,}1 \text{ (cái bánh)}$$

Độ phân tán của số bánh bán được từng ngày so với số bánh bán được trung bình là phương sai của bảng số liệu thống kê, hay cũng là độ lệch tiêu chuẩn.

$$S^2 = 2397 - 2125{,}21 = 271{,}79 \Rightarrow S = \sqrt{271{,}79} = 16{,}49 \text{ (cái bánh).}$$

2. a) Ta có bảng phân bố tần suất ghép lớp của cân nặng học sinh 2 lớp 10A và 10B :

Lớp cân nặng (kg)	Giá trị đại diện	Tần suất %	
		10A	10B
[33 – 39)	36	1,9	3,5
[39 – 45)	42	11,3	8,6
[45 – 51)	48	28,3	31,0
[51 – 57)	54	37,7	24,1
[57 – 63)	60	15,1	20,7
[63 – 69)	66	5,7	8,6
[69 – 75)	72	0	3,5
		$\sum = 100\%$	$\sum = 100\%$



Hình 59

– Nhìn trên đồ thị ta thấy số người nặng trên 60 kg lớp 10B chiếm tỉ lệ cao hơn lớp 10A.

b) Tỉ lệ những người nặng dưới 57 kg.

– Lớp 10A có (57,7 + 28,3 + 11,3 + 1,9)% = 79,2%

– Lớp 10B có (24,1 + 31,0 + 8,6 + 3,5)% = 67,2%

=> tỉ lệ những người nặng dưới 57 kg của lớp 10B thấp hơn lớp 10A.

c) Ta có giá trị trung bình và độ lệch chuẩn theo số liệu lớp 10A

$\bar{X}_A = 52,19$kg

$S_A^2 = 2767,21 - 52,19^2 = 43,42 \Rightarrow S_A = \sqrt{43,42} = 6,59$.

- Giá trị trung bình và độ lệch chuẩn theo số liệu lớp 10B

$\overline{X}_B = 53,38$

$S_B^2 = 2915,32 - 53,38^2 = 65,89 \Rightarrow S_B = \sqrt{65,89} = 8,12$.

- So sánh $\overline{X}_A$ và $\overline{X}_B$ ta có $\overline{X}_B > \overline{X}_A$.

$\Rightarrow$ Lớp 10B có cân nặng cao hơn lớp 10A.

- So sánh S_A và S_B ta có $S_B > S_A \Rightarrow$ lớp 10A có cân nặng đều hơn lớp 10B.

3. a) Giá trị trung bình $\overline{X}_1 = 146,93$. Mốt $M_0 = 145$. Số trung vị $Me = 145$.

b) Ta chọn $\overline{X}_1 = 146,93$ làm giá trị đại diện cho số liệu thống kê về quy mô và độ lớn.

c) Ta có phương sai $S_1^2 = 172,91$. Độ lệch tiêu chuẩn

$$S_1 = \sqrt{172,91} = 13,15.$$

So sánh với khối lượng quả xoài của cây thứ hai ta thấy : $\overline{X}_2 \approx \overline{X}_1$ mà $S_2 = 10,24 < 13,15 = S_1$.

Do đó khối lượng quả xoài trên cây thứ hai đồng đều nhau hơn.

CHƯƠNG VI.

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đơn vị đo góc và cung : Có hai đơn vị đo góc và cung : độ và radian (rad)

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn :

$1^\circ = 60'$ (phút); $1' = 60''$ (giây)

1) Để chuyển từ a° sang α rad ta có công thức $\alpha = \frac{\pi a}{180}$ (rad).

2) Để chuyển từ α rad sang a° ta có : $a = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$.

3) Cung tròn có bán kính R có số đo a° $(0 \le a \le 360)$ thì có độ dài $l = \frac{\pi a R}{180}$.

4) Cung tròn có bán kính R có số đo α rad $((0 \le \alpha \le 2\pi)$ thì có độ dài $l = R\alpha$.

2. Góc và cung lượng giác

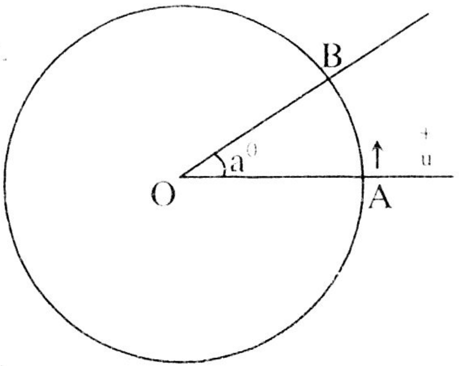
1) Nếu một góc lượng giác có số đo là a° (hay α rad) thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo $a^\circ + k.\ 360^\circ$ (hay $\alpha + k2\pi$ rad) k là Z, mỗi góc ứng với một k.

$(Ou, Ov) = a^\circ + k360^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha + k2\pi$.

2) Số đo của một cung lượng giác có điểm đầu là A, điểm cuối là B là :

sđ $\overset{\frown}{AB} = a^\circ + k360^\circ$ hay

sđ $\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi$.



Hình 60

3) Muốn biểu diễn một cung lượng giác trên đường tròn lượng giác ta chọn điểm A(1; 0) làm điểm đầu của cung, nên chỉ cần xác định điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ thì sđ $(OA, OM) = \alpha$.

5) Hệ thức Sa–lơ về số đo của góc lượng giác (cung lượng giác)

sđ (Ou, Ov) + sđ (Ov, Ow) = sđ $(Ou, Ow) + k2\pi$, $k \in Z$.

Với 3 điểm U, V, W, trên đường tròn định hướng, ta có :

sđ $\overset{\frown}{UV}$ + sđ $\overset{\frown}{VW}$ = = sđ $\overset{\frown}{UW}$ $= k2\pi$.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Đổi các góc sau từ rad ra độ : -3; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{4}{5}$.

2. Đổi các góc sau từ độ ra radian : $130°$; $-72°15'$; $26°34'$; $30°$. (chính xác đến 0,001).

3. Tìm độ dài của các cung tròn trên đường tròn (0; 20 cm) nếu số đo của chúng là :

a) $\frac{3\pi}{2}$; b) $42°$; c) $\frac{5}{2}$.

4. a) Thế nào là đường tròn định hướng. Biểu diễn cung lượng giác ứng với góc lượng giác có số đo $(Ou, Ov) = 30° + k360°$ trên đường tròn định hướng.

b) Nêu sự khác biệt của góc hình học $\widehat{uOv}$ và góc lượng giác (Ou, Ov), cung hình học AB và cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$.

5. Thế nào là đường tròn lượng giác.

6. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A(1; 0). Hãy chỉ điểm cuối của các cung lượng giác có số đo : $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $315°$; $-270°$; $\frac{5\pi}{3}$.

7. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; 1 cm).

a) Tính số đo bằng rad của các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AC}$.

b) Tính độ dài của các cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$.

8. Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM} = 50°$. Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua góc O, M_2, M_3 là điểm đối xứng với M lần lượt qua trục tung và trục hoành. Tìm số đo của các cung $\overset{\frown}{AM_1}, \overset{\frown}{AM_2}, \overset{\frown}{AM_3}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Theo công thức đổi rad ra độ ta có $a = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$ hay 1 rad $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$

(nếu lấy $\pi \approx 3,14$)

Vậy -3 rad $\approx -171°53'15''$

$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$; $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$; $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

$\alpha = \frac{3\pi}{2} = 270°$; $\alpha = \frac{4}{5} \approx \frac{4}{5} \times 57°17'45'' \approx 45°38'12''$.

2. Theo công thức đổi độ ra radian $\alpha = \frac{\pi a}{180}$ (rad) hay $1° \approx 0,0175$ rad

$130° \approx 2,27$ rad; $-72°15' \approx -1,264$ rad; $26°34' \approx 0,555$; $30° = \frac{\pi}{6} \approx 0,532$ rad .

3. Trên đường tròn bán kính R

Nếu số đo của cung là a° thì có độ dài $l = \frac{\pi a R}{180}$

Nếu số đo của cung là α rad thì có độ dài $l = \alpha R$.

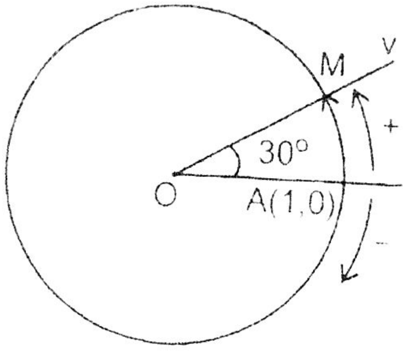
a) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad, R = 20 cm

thì $l = \frac{3\pi}{2}.20 = 30\pi$ (cm).

b) $\alpha = 42°$, R = 20

$\Rightarrow l = \frac{\pi.42.20}{180} \approx 14,65$ (cm).

c) $\alpha = \frac{5}{2}$ rad, R = 20 thì $l = \frac{5}{2} \times 20 = 50$ (cm).



Hình 61

4. a) Đường tròn định hướng là đường tròn trên đó đã chọn một chiều chuyển động gọi là *chiều dương*, chiều ngược lại là chiều âm. Người ta quy ước chọn chiều *ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương* (tất nhiên thuận chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm). (h. 61)

Cung lượng giác ứng với góc lượng giác (Ou, Ov) = 30° + k360° thì cung này cũng có số đo là 30° + k360°.

Ta chọn điểm A(1; 0) làm điểm đầu của cung, ta chọn điểm M là điểm cuối của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi $\overset{\frown}{AM} = 30°$

b) Góc hình học uOv là hoàn toàn xác định, góc lượng giác (Ou, Ov) không được xác định duy nhất

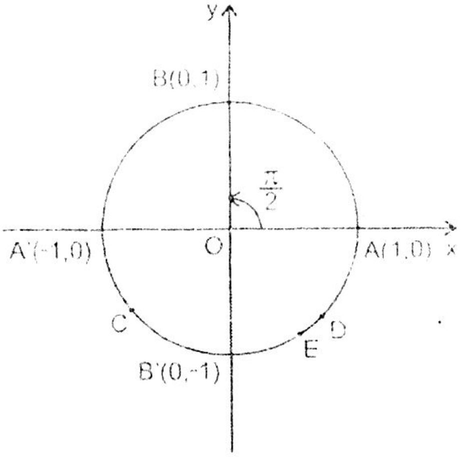
Cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ là hoàn toàn xác định. Cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ không được xác định duy nhất.

5. Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1.

Đường tròn này có tâm O là gốc tọa độ và cắt trục hoành tại 2 điểm A(1; 0), A'(−1; 0) và cắt trục tung tại 2 điểm B(0; 1) và B'(0; −1) (h. 62). Ta lấy A(1; 0) làm điểm gốc của các cung lượng giác.

6. Điểm cuối của các cung lượng giác có sđ :

$\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}; 315°; -270°; \frac{5\pi}{3}$ lần lượt là B, C, D, B, E.



Hình 62

7. $\overset{\frown}{AB} = 120°; \overset{\frown}{BC} = 120°, \overset{\frown}{CA} = 120°$ ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$ do ΔABC đều)

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 240°$ (hệ thức Salơ)

Nên $\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi}{3}$, $\overset{\frown}{AC} = \frac{4\pi}{3}$

$l_{AB} = \frac{2\pi}{3}.1 = \frac{2\pi}{3}$ (cm) $l_{AC} = \frac{4\pi}{3}.1 = \frac{4\pi}{3}$ (cm)

8. Dễ dàng xác định được điểm cuối M trên đường tròn lượng giác vì sđ $\overset{\frown}{AM} = 50^\circ$.

Do M_1 đối xứng với M qua gốc O, nên sđ

$\overset{\frown}{MM_1} = 180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AM_1} = 50^\circ + 180^\circ = 230^\circ$

Vậy sđ $\overset{\frown}{AM_1} = 230^\circ + k360^\circ (k \in Z)$

Do M_2 đối xứng với M qua Oy nên sđ $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{BM_2} = 40^\circ$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MM_2} = 80^\circ \Rightarrow$

Vậy sđ $AM_2 = 130^\circ + k360^\circ$

Do M_3 đối xứng với M qua trục Ox nên sđ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{M_3A} = 50^\circ$

Nên sđ $\overset{\frown}{AM_3} = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$.

Vậy sđ $\overset{\frown}{AM_3} = 310^\circ + k360^\circ (k \in Z)$.

§2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

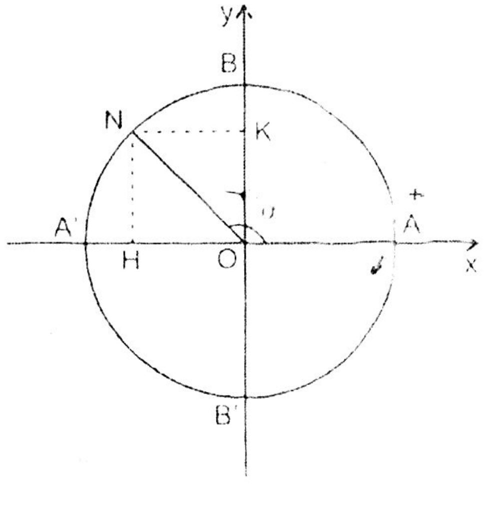
1. Một số khái niệm

Cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ (h. 63) trên đường tròn lượng giác

1) Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x = OH$. (hình 63)

2) Tung độ y của điểm M được gọi là sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y = OK$.

3) Nếu cos $\neq 0$, thì tỉ số $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của góc α và kí hiệu là $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



Hình 63

4) Nếu $\sin\alpha \neq 0$, thì tỉ số $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là cotang của góc α và kí hiệu là $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Chú ý

1) $\sin\alpha = \sin(\alpha + k2\pi)\ \forall k \in Z$, $\cos\alpha = \cos(\alpha + k2\pi)\ \forall k \in Z$

2) $\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)\ \forall k \in Z$, $\cot\alpha = \cot(\alpha + k\pi)\ \forall k \in Z$

(tanα xác định với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, cotα xác định với $\alpha \neq k\pi\ \forall k \in Z$)

3) $-1 < \sin\alpha < 1$, $-1 < \cos\alpha < 1$.

4) Dấu các hàm số lượng giác cho trong bảng sau :

Góc phần tư	sđ của cung	sinα	cosα	tanα	cotα
I	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	+			
III	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$			+	+
IV	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$		+		

3. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$

$tg\alpha.cotg\alpha = 1$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ và } \alpha \neq k\pi\right)$.

4. Một số công thức

1) Cung đối nhau

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.

2) Cung bù nhau

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

3) Cung hơn kém nhau π

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$.

4) Cung phụ nhau

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị của α để các biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất :

$A = \dfrac{1}{1 + \sin\alpha}$, $B = \dfrac{1}{1 - \cos\alpha}$

và tìm các giá trị nhỏ nhất đó.

Giải : $\min A = \dfrac{1}{2}$ với $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\min B = \dfrac{1}{2}$ với $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + k2\pi$.

Ví dụ 2. Xét các dấu hiệu sau :

a) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$; b) $\cot 304^\circ - \cot 316^\circ$

Giải:

a) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ = \sin 57^\circ - \sin 48^\circ > 0$ vì $\sin 57^\circ > \sin 48^\circ$

b) $\cot 304^\circ - \cot 316^\circ = \cot(360^\circ - 56^\circ) - \cot(360^\circ - 44^\circ)$

$= \cot(-56^\circ) - \cot(-44^\circ) = -\cot 56^\circ + \cot 44^\circ$

$= \cot 44^\circ - \cot 56^\circ > 0$ vì $\cot 44^\circ > \cot 56^\circ$.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $5\tan 540^\circ + 2\cos 1170^\circ + 4\sin 990^\circ - 3\cos 540^\circ$.

b) $3\sin\dfrac{25\pi}{6} - 3\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{4} + 2\cos\dfrac{19\pi}{3}$.

c) $\sin(\pi + a) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) + \operatorname{cotg}(2\pi - a) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + a\right)$.

Giải:

a) Ta có : $\tan 540^\circ = \tan 3.180^\circ = \tan 0^\circ = 0$

$\cos 1170^\circ = \cos(3.360^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

$\sin 990^\circ = \sin(3.360^\circ - 90^\circ) = \sin(-90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$

$\cos 540^\circ = \cos(2.180^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$

Biểu thức đã cho thành : $-4 - 3(-1) = -1$

b) $\sin\dfrac{25\pi}{6} = \sin\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

$\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\cos\dfrac{19\pi}{3} = \cos\left(6\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

Biểu thức đã cho thành : $3.\dfrac{1}{2} - 3 + 2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\sin(\pi + a) = -\sin a$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

$\cot g(2\pi - a) = \cot(-a) = -\cot a$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + a\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

Biểu thức đã cho thành : $-\sin a + \sin a - \cot a - \cot a = -2\cot a$.

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sin^4 a + \cos^2 a + \sin^2 a.\cos^2 a$

b) $$B = \frac{\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2 - 1}{\tan\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}.$$

c) $$C = \frac{\cos^2 696^\circ + \tan(-260^\circ)\tan 530^\circ - \cos^2 156^\circ}{\tan^2 252^\circ + \cot^2 342^\circ}.$$

d) $$D = \left[\tan\frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - b\right)\right]^2 + \left[\cot\frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - b)\right]^2$$

Giải:

a) $A = \sin^2 a(\sin^2 a + \cos^2 a) + \cos^2 a = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

b) $$B = \frac{\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - 1}{\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} - \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\dfrac{\sin\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}\left(1 - \cos^2\frac{a}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}} = 2\cot g^2\frac{a}{2}.$$

c) $\cos 696^\circ = \cos(720^\circ - 24^\circ) = \cos(-24^\circ) = \cos 24^\circ$

$\tan(-260^\circ) = \tan(-180^\circ - 80^\circ) = \tan(-80^\circ) = -\cot 10^\circ$

$\tan 530^\circ = \tan(540^\circ - 10^\circ) = \tan(3.180^\circ - 10^\circ) = \tan(-10^\circ) = -\tan 10^\circ$

$\cos 156^\circ = \cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ$

$\tan 252^\circ = \tan(180^\circ + 72^\circ) = \tan 72^\circ = \cot 18^\circ$

$\cot 342^\circ = \cot(360^\circ - 18^\circ) = \cot(-18^\circ) = -\cot 18^\circ$

$\Rightarrow \cot^2 342^\circ = \cot(-18^\circ)^2 = \cot^2 18^\circ$

Thay vào:

$$C = \frac{\cos^2 24^\circ + \cot 10^\circ.\tan 10^\circ - \cos^2 24^\circ}{\cot^2 18^\circ + \cot^2 18^\circ}$$

$$= \frac{\cos^2 24^\circ + 1 - \cos^2 24^\circ}{2\cot^2 18^\circ} = \frac{1}{2\cot^2 18^\circ} = \frac{1}{2}\tan^2 18^\circ.$$

d) $\tan\frac{17\pi}{4} = \tan\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\tan\left(\frac{7\pi}{2} - b\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - b\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cot b$

$\cot\frac{13\pi}{4} = \cot\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

$\cot(7\pi - b) = \cot(-b) = -\cot b$

Thay vào :

$D = (1 + \cot b)^2 + (1 - \cot b)^2$

$= 1 + \cot^2 b + 2\cot b + 1 + \cot^2 b - 2\cot b = 2(1 + \cot^2 b) = \frac{2}{\sin^2 b}$.

Ví dụ 5. (Đại học sư phạm Hà Nội – B – 2000)

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$$

Chứng minh rằng $A < 60^\circ$.

Giải:

Theo định lí sin trong tam giác ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}$

Từ giả thiết ta có :

$$\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2.\frac{a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Theo định lí cosin trong tam giác ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}}{2bc}$$

$$\frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{2bc}{4bc} \Rightarrow \cos A \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq 60^\circ.$$

BÀI TẬP

1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}\right)$

b) $\sin^3 a(1 + \text{cotg}a) + \cos^3 a(1 + \tan a)$

c) $\frac{\tan b}{\tan b + \cot b}$

d) $\frac{1 - \cos^4 a - \sin^4 a}{\cos^4 a}$.

2. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \dfrac{\sin(x-\pi)\cos(x-2\pi)\sin(2\pi-x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$

b) $B = \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right]^2+\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right]^2$

c) $C = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+a\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}+a\right)+\tan(\pi+a)\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)$

d) $E = \tan 50^\circ.\tan 190^\circ.\tan 250^\circ.\tan 260^\circ.\tan 400^\circ.\tan 700^\circ$.

3. Cho A, B, C là ba góc của ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin(A+B) = \sin C$, $\cos(B+C) = -\cos A$

b) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$

$\tan(A+C) = -\text{tg}B$, $\cot(A+B) = -\cot C$.

$\tan\dfrac{A+C}{2} = \cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{A+B}{2} = \tan\dfrac{C}{2}$.

4. Chứng minh rằng với mọi x, ta đều có :

$$\left|\frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \le \frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$$

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trong khoảng $-\pi < x < \pi$

6. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ 1 nhỏ hơn -1.

7. Gọi a, b, c là các cạnh đối diện với các góc tương ứng của ΔABC. Chứng minh : nếu các cạnh và các góc của ΔABC thỏa mãn điều kiện :

$$2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$$

thì ΔABC là tam giác đều.

8. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, ta luôn luôn có :

$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 1$

(ĐH Ngoại thương – D – 1997).

LỜI GIẢI VẮN TẮT, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ

1. a)

$$\left(\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}}-\sqrt{\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}}\right)$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}}-\sqrt{\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sin x}-\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}\right)\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\cos^2 x}}{1+\sin x}-\frac{\sqrt{\cos^2 x}}{1-\sin x}\right)\left(\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1-\cos x}\right)$$

$$=|\cos x|\left(\frac{1}{1+\sin x}-\frac{1}{1-\sin x}\right)|\sin x|\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$$

$$=|\sin x\cos x|\left(\frac{-2\sin x}{1-\sin^2 x}\right)\left(\frac{-2\cos x}{1-\cos^2 x}\right)$$

$$=|\sin x\cos x|\frac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x\sin^2 x}=\frac{4|\sin x\cos x|}{\sin x\cos x} \qquad (*)$$

– Nếu sinxcosx > 0 nghĩa là sinx và cosx cùng dấu

$\Rightarrow k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $\pi+k2\pi < x < \frac{3\pi}{2}+k2\pi$ thì (*) cho đáp số : 4

– Nếu sinx.cosx < 0 nghĩa là sinx và cosx trái dấu

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+k2\pi < x < \pi+k2\pi$ hoặc $\frac{3\pi}{2}+k2\pi < x < (1+k)2\pi$ thì (*) cho đáp số : –4

b) $\sin^3 a\left(1+\frac{\cos a}{\sin a}\right)+\cos^3 a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)$

$\sin^3 a.\frac{\sin a+\cos a}{\sin a}+\cos^3 a.\frac{\cos a+\sin a}{\cos a}$

$(\sin a+\cos a)(\sin^2 a+\cos^2 a)=(\sin a+\cos a)$

c) $\frac{\tan b}{\tan b+\frac{1}{\tan b}}=\frac{\tan^2 b}{\tan^2 b+1}=\frac{\tan^2 b}{\frac{1}{\cos^2 b}}=\sin^2 b$

d) $\frac{(1-\cos^2 a)(1+\cos^2 a)-\sin^4 a}{\cos^4 a}=\frac{\sin^2 a(1+\cos^2 a)-\sin^4 a}{\cos^4 a}$

$\frac{\sin^2 a(1+\cos^2 a-\sin^2 a)}{\cos^4 a}=\frac{\sin^2 a.2\cos^2 a}{\cos^4 a}=2\tan^2 a$.

2. a) $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$

$\cos(x - 2\pi) = \cos x$

$\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cot(\pi - x) = -\cot x$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

Thay vào $A = \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos x . \cot x . \tan x} = \sin^2 x$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

$\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$

Thay vào $B = (\cos x + \sin x)^2 + (-\sin x + \cos x)^2$

$= \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x.\sin x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x.\sin x = 2$

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{3} + a\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3} + a\right) = \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$

$\tan\left(\frac{2\pi}{3} + a\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3} + a\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + a\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$

$\tan(\pi + a) = \tan a$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3} - a\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$

Thay vào

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\left[-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)}\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\right] + \tan a.\cot a$$

$$= -\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - a\right) + 1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$$

d) $\tan 190^\circ = \tan(180^\circ + 10^\circ) = \tan 10^\circ$

$\tan 250^\circ = \tan(180^\circ + 70^\circ) = \tan 70^\circ$

$\tan 260^\circ = \tan(180^\circ + 80^\circ) = \tan 80^\circ$

$\tan 400^\circ = \tan(360^\circ + 40^\circ) = \tan 40^\circ$

$\tan 700^\circ = \tan(720^\circ - 20^\circ) = \tan(-20^\circ) = -\tan 20^\circ$

Thay vào $E = -\tan 50^\circ.\tan 10^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ \tan 40^\circ \tan 20^\circ$

$= -\tan 50^\circ \tan 40^\circ \tan 10^\circ \tan 80^\circ \tan 70^\circ \tan 20^\circ$

$= \tan 50^\circ \cot 50^\circ \tan 10^\circ \cot 10^\circ \cot 20^\circ \tan 20^\circ = -1.$

3. a) Ta có : $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B = 180^\circ - C$

$\Rightarrow \sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$

$B + C = 180^\circ - A \Rightarrow \cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$

$A + C = 180^\circ - B \Rightarrow \tan(A + C) = \tan(180^\circ - B) = -\tan B$

$A + B = 180^\circ - C \Rightarrow \cot(A + B) = \cot(180^\circ - C) = -\cot C$

b) $A + B = 180^\circ - C \Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{B+C}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2} \Rightarrow \tan\frac{A+C}{2} = \tan\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = \cot\frac{B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \Rightarrow \cot\frac{A+B}{2} = \cot\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \tan\frac{C}{2}.$$

4. Hàm $y = \frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$ xác định với mọi x. Bài toán dẫn đến tìm miền giá trị của y.

Ta có : $y(\cos 3x + 2) = \cos 3x + a\sin 3x + 1$

$\Leftrightarrow (1 - y)\cos 3x + a\sin 3x = 2y - 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$[(1 - y)\cos 3x + a\sin 3x]^2 \le (1 - y)^2 + a^2$

$\Leftrightarrow (2y - 1)^2 \le (1 - y)^2 + a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \le y \le \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

5. Hàm y được xác định với mọi $x \in (\pi; \pi)$, làm như bài 3, ta có

$\max y = 2$, $\min y = \frac{2}{11}$.

6. Làm giống bài 4, ta có: $(2y - 1)^2 \le k^2 + y^2$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - k^2 \le 0 \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} \le y \le \frac{2 + \sqrt{1 + 3k^2}}{3}$$

Theo đầu bài, ta phải có:

$$\frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow 5 < \sqrt{1 + 3k^2} \Leftrightarrow k^2 > 8 \Leftrightarrow |k| > 2\sqrt{2}.$$

7. Tam giác vuông ABH và CHA cho : $BH = c.\cos B$

$HC = b.\cos C$

$a = b.\cos C + c.\cos B$.

Chứng minh tương tự : $b = c.\cos A + a.\cos C$, $c = a.\cos B + b.\cos A$. Thay chúng vào vế phải đẳng thức đã cho và thực hiện phép tính, ta có :

$(a - b)(\cos B - \cos A) + (b - c)(\cos C - \cos B) + (c - a)(\cos A - \cos C) = 0$ (*)

Cho rằng $a > b > c \Rightarrow A > B > C$. Vì hàm cosin nghịch biến trong khoảng $(0; \pi)$ nên vế trái của (*) là tổng của ba số không âm, mà tổng đó bằng 0, nên :

$$\begin{cases} (a - b)(\cos B - \cos A) = 0 \\ (b - c)(\cos C - \cos B) = 0 \\ (c - a)(\cos A - \cos C) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \text{đpcm.}$$

8. Chắc chắn ta có :

$\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A.\sin B - \sin B.\sin C - \sin C.\sin A > 0$ (đpcm)

Ta cũng có $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) > 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A.\sin B + \sin B.\sin C + \sin C.\sin A - \sin A.\sin B.\sin C \geq 0$

$1 - \sin A.\sin B.\sin C \geq \sin A + \sin B + \sin C - \sin A.\sin B - \sin B.\sin C - \sin C.\sin A$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A.\sin B - \sin B.\sin C - \sin C.\sin A < 1$ (đpcm)

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng

Với mọi số thực a và b, các công thức sau gọi là công thức cộng

$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ (1)

$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$ (2)

$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ (3)

$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ (4)

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ (5)

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$ (6)

Chú ý :

Với công thức (5) có các điều kiện

$a, b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, a + b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z$

Với công thức (6) có các điều kiện

$a, b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, a - b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z$

2. Công thức nhân đôi, nhân ba

Ta có các công thức sau gọi là công thức nhân đôi, nhân ba:

$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$ (7)

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (8)

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$ (9) $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, a \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ (10)

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ (11)

3. Công thức hạ bậc – Công thức tính theo $t = \tan\dfrac{a}{2}$

$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

$\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ $\qquad$ $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\left(t = \tan\dfrac{a}{2}\right)$

$\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

$\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

$\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a + b}{2}\cos\dfrac{a - b}{2}$ $\qquad$ $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a + b}{2}\sin\dfrac{a - b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a + b}{2}\cos\dfrac{a - b}{2}$ $\qquad$ $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a + b}{2}\sin\dfrac{a - b}{2}$

$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a + b)}{\cos a\cos b}$ $\qquad$ $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a - b)}{\cos a\cos b}$

$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a + b)}{\sin a\sin b}$ $\qquad$ $\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(a - b)}{\sin a\sin b}$

Ví dụ 1. Chứng minh các công thức :

a) $\cos a + \sin a = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)$

b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right)$

Giải :

a) $VT = 1.\cos a + \sin a = \tan\frac{\pi}{4}\cos a + \sin a =$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \text{đpcm}(*)$$

Vì $\frac{\pi}{4} + a$ và $\frac{\pi}{4} - a$ phụ nhau nên

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \Rightarrow$ đpcm.

b) Vế trái $= 1.\cos a - \sin a = \tan\frac{\pi}{4}\cos a - \sin a$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \text{ (đpcm)}$$

Tương tự như câu a, ta cũng có $VT = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức :

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cos a - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\sqrt{2}\sin a + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$

b) $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ\cos 21^\circ + \cos 69^\circ\cos 79^\circ$

c) $(\tan a - \tan b)\cot(a - b) - \tan a\tan b$.

Giải:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a - \sin a)$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos a + \cos\frac{\pi}{4}\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a + \sin a)$

$$\frac{\sqrt{2}\cos a - \sqrt{2}\cos a + \sqrt{2}\sin a}{-\sqrt{2}\sin a + \sqrt{2}\cos + \sqrt{2}\sin a} = \tan a$$

b) $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ.\cos 21^\circ + \sin 21^\circ.\sin 11^\circ$

$= \cos 10^\circ + \cos(21^\circ - 11^\circ) = 2\cos 10^\circ$

c) $\cot(a - b) = \dfrac{1}{\tan(a - b)} = \dfrac{1 + \tan.\tan b}{\tan a - \tan b}$

$C = (\tan a - \tan b).\cot(a - b) - \tan a.\tan b = 1 + \tan a.\tan b - \tan a.\tan b = 1$

Ví dụ 3. Chứng minh trong mọi ΔABC, ta đều có :

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$;

b) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan.\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$.

c) $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$.

d) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

Giải :

a) $A + B = 180^\circ - C \Rightarrow \tan(A + B) = \tan(180^\circ - C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A.\tan B)$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ (dpcm).

b) Có : $\dfrac{A + B}{2} = 90^\circ - \dfrac{C}{2} \Rightarrow \tan\dfrac{A + B}{2} = \cot\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} = \cot\dfrac{C}{2}\left(1 - \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}\right)$

Vế trái $= \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\left(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\right) =$

$= \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}.\cot\dfrac{C}{2}\left(1 - \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}\right)$

$= \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + 1 - \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = 1$ (dpcm).

c) Vế trái $= \cot C\left(\dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B}\right) + \cot B.\cot A$

$= \cot C\dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B} + \cot B.\cot A = -\cot C.\tan C\dfrac{1 - \tan A.\tan B}{\tan A.\tan B} + \cot B.\cot A$

$= -\dfrac{1}{\tan A.\tan B} + 1 + \dfrac{1}{\tan A.\tan B} = 1$ (dpcm)

d) Vế trái $= \dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\tan\frac{B}{2}} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} + \cot\dfrac{C}{2}$

$= \dfrac{\cot\frac{C}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\right)}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} + \cot\dfrac{C}{2}$

$= \cot\frac{C}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}$ $\Rightarrow \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\sin 3a.\cos a - \cos 3a.\sin a}$ b) $2\sin a.\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a)$;

c) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ d) $\dfrac{\tan^2\frac{\pi}{8}-1}{\tan\frac{\pi}{8}}$

Giải :

a) Vì $\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$ (góc phụ nhau)

$$A = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\sin(3a-a)} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\sin 2a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)}{\sin 2a} = \frac{1}{2}\frac{\cos 2a}{\sin 2a} = \frac{1}{2}\text{cotg}\,2a.$$

b) $\sin 2a.\cos 2a = \dfrac{1}{2}\sin 4a$

c) $\dfrac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$

$$= \frac{2\sin 40^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ.\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}$$

$= \dfrac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \dfrac{1}{8}$ vì $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$

d) $\dfrac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{\tan^2\frac{\pi}{8}-1}} = \dfrac{-2}{\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}} = \dfrac{-2}{\tan\frac{\pi}{4}} = -2.$

Ví dụ 5. Chứng minh : $\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right) = \frac{1}{4}\sin 3a$

Áp dụng với $a = \dfrac{\pi}{9}$

Giải:

$$VT = \sin a\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos a - \sin a\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a - \frac{1}{2}\sin a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a\right) = \sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right)$$

$$= \sin a\left[\frac{3}{4}\left(1 - \sin^2 a\right) - \frac{1}{4}\sin^2 a\right]$$

$$= \sin a\left(\frac{3}{4} - \sin^2 a\right) = \frac{1}{4}(3\sin a - 4\sin^3 a) = VP$$

Với $a = \frac{\pi}{9}$ (ứng với góc 20°), ta có :

$$\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Ví dụ 6. (Học viện Ngân hàng – 2000)

Chứng minh đẳng thức $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$

$\sin 18^\circ = t$, vậy $0 < t < 1$, ta có:

$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \sin 3.18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 3t - 4t^3$ (1)

Mặt khác $\cos 36^\circ = \cos 2.18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2t^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $1 - 2t^2 = 3t - 4t^3$

$\Leftrightarrow 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 = 0$ (*) (do $t \neq 1$)

$\Rightarrow (2t + 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 \Rightarrow 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$ (đpcm)

Cũng có thể giải như sau :

Từ (*) ta tính được $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ (loại do $0 < t < 1$)

Vậy $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

Do đó $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ =$

$$= 8.\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^3 + 8.\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = 8\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} + 1\right)$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{4} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 7. (Đại học Quốc gia Hà Nội – B – 2000).

Chứng minh rằng : $8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} = \cot\frac{\pi}{32}$.

Giải:

Ta có: $\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\cot\frac{\pi}{32} - \tan\frac{\pi}{32} - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8} = 2\cot\frac{\pi}{16} - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8}$$

$$= 4\cot\frac{\pi}{8} - 4\tan\frac{\pi}{8} = 4.2\cot\frac{\pi}{4} = 8.1 = 8 \text{ (dpcm)}.$$

Ví dụ 8. Chứng minh các biểu thức sau

a) $\frac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \tan^2\frac{a}{2}$;

b) $\frac{1 - \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a + \cos 2a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$;

c) $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4\cos^2\frac{a + b}{2}$;

d) $\tan\frac{a}{2} = \cot g\frac{a}{2} - 2\cot a$.

Giải:

a) Vế trái = $\frac{2\sin a - 2\sin a.\cos a}{2\sin a + 2\sin a.\cos a} = \frac{2\sin a(1 - \cos a)}{2\sin a(1 + \cos a)} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \tan^2\frac{a}{2}$

b) Vế trái = $\frac{1 + \cos 2a - \sin 2a}{1 + \cos 2a + \sin 2a} = \frac{2\cos^2 a - 2\sin a\cos a}{2\cos^2 a + 2\sin a\cos a}$

$$= \frac{2\cos a(\cos a - \sin a)}{2\cos a(\cos a + \sin a)} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = \text{dpcm}$$

c) Vế trái = $\sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b + 2(\cos a\,\mathrm{co}b + \sin a\sin b)$

$= 2[1 + \cos(a - b)] = \text{dpcm}$

d) Có đẳng thức tương đương $\tan\frac{a}{2} - \cot g\frac{a}{2} = -2\cot a$

$$\text{Vế trái} = \tan\frac{a}{2} - \frac{1}{\tan\frac{a}{2}} = \frac{\tan^2\frac{a}{2} - 1}{\tan\frac{a}{2}} = -\frac{1}{\frac{\tan\frac{a}{2}}{1 - \tan^2\frac{a}{2}}}$$

Ví dụ 9. Chứng minh: $\tan 7^\circ 30' = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Giải :

Dễ thấy $\tan a = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}$ nên $\tan 7^\circ 30' = \frac{1 - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

Mà $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \sqrt{2}$

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \sin 30^\circ.\cos 45^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

Thay vào đẳng thức trên :

$\tan 7^\circ 30' = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} =$ đpcm.

Ví dụ 10. Rút gọn biểu thức :

$A = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \ldots + \cos(a + nb)$ $(n \in N)$

Giải:

Với $b \neq k2\pi$ $(k \in Z)$, ta có :

$A\sin\frac{b}{2} = \sin\frac{b}{2}\cos a + \sin\frac{b}{2}\cos(a + b) + \sin\frac{b}{2}\cos(a + 2b) +$

$+ \ldots + \sin\frac{b}{2}\cos(a + nb)$

$= \frac{1}{2}\sin\left(a + \frac{b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{3b}{2}\right) -$

$- \sin\left(a + \frac{b}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{5b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3b}{2}\right) + \ldots$

$+ \sin\left(a + \frac{2n + 1}{2}b\right) - \sin\left(a + \frac{2n - 1}{2}b\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a + \frac{2n + 1}{2}b\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)\right] = \sin\frac{n + 1}{2}b\cos\left(a + \frac{n}{2}b\right)$

$$A = \frac{\sin\frac{n + 1}{2}b\cos\left(a + \frac{n}{2}b\right)}{\sin\frac{b}{2}}$$

$b = k2\pi$ $(k \in Z) \Rightarrow A = (n + 1)\cos a$.

Ví dụ 11. Chứng minh

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

Giải:

$$VT = \frac{1}{2}\left(\cos 20^0 - \cos 60^0\right).\frac{1}{2}\left(\cos 20^0 - \cos 140^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos 20^0 - \cos 60^0\right)\left(\cos 20^0 + \cos 40^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^2 20^0 - \cos 60^0 \cos 20^0 + \cos 40^0 \cos 20^0 - \cos 60^0 \cos 40^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 40^0}{2} - \frac{1}{2}\cos 20^0 + \frac{\cos 60^0 + \cos 20^0}{2} - \frac{1}{2}\cos 40^0\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \cos 40^0 - \cos 20^0 + \frac{1}{2} + \cos 20^0 - \cos 40^0\right) = \frac{3}{16}.$$

Ví dụ 12. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{\cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}$

b) $\dfrac{\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a}{\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a}$

c) $\cos a - \dfrac{\cos\left(2a - \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2a + \dfrac{\pi}{6}\right)}{2\cos a}$

d) $\dfrac{\cos\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot\dfrac{a}{2}}$.

Giải :

a) $$\frac{(\cos 5a + \cos a) - (\cos 7a + \cos 3a)}{(\sin 5a + \sin a) + (\sin 7a + \sin 3a)} = \frac{2\cos 3a.\cos 2a - 2\cos 5a.\cos 2a}{2\sin 3a.\cos 2a + 2\sin 5a.\cos 2a}$$

$$= \frac{2\cos 2a(\cos 3a - \cos 5a)}{2\cos 2a(\sin 3a + \sin 5a)} = \frac{2\sin 4a.\sin(-a)}{2\sin 4a.\cos a} = -\tan a$$

b) $$\frac{2\cos 2a\cos a + 2\cos 2a}{2\sin 2a.\cos a + 2\sin 2a} = \frac{2\cos 2a(\cos a + 1)}{2\sin 2a(\cos a + 1)} = \cot 2a.$$

c) $$\cos a - \frac{2\sin 2a.\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\cos a} = \cos a - \frac{2\sin a.\cos a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\cos a}$$

$$= \cos a - \sqrt{3}\sin a = \cos a - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\sin a$$

$$= \frac{\cos a.\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin a.\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{3}} = 2\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$$

d) $\dfrac{2\cos a.\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{a}{2}} = \sin a.\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$.

$\sin a.\sin\frac{a}{2}$

Ví dụ 13. Chứng minh trong mọi ΔABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$

d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$.

Giải:

a) $VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = \text{đpcm}$.

b) $VT = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1 = 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$

c) Vế trái $= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2 C = 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$

$= 2 - \cos(A+B).\cos(A-B) - \cos^2 C$

$= 2 + \cos C[\cos(A-B) + \cos C]$

$= 2 + \cos C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \text{đpcm}$.

d) Vế trái $= \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \sin^2 C = 1 + \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= 1 + \underbrace{\cos(A+B)}_{-\cos C}\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = \text{đpcm}$.

II. BÀI TẬP

Công thức cộng

1. a) Cho $a - b = \frac{\pi}{4}$

chứng minh $\frac{1+\tan b}{1-\tan b} = \tan a$ và $\frac{\tan a - 1}{\tan a + 1} = \tan b$

b) Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$

$(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$ và $(1 - \cot a)(1 - \cot b) = 2$.

2. Cho $\begin{cases} \tan(x + \alpha) = a \\ \tan(\alpha - y) = b \end{cases}$. Chứng minh : $\tan(x + y) = \frac{a - b}{1 + ab}$

3. a) Cho $\tan a = \frac{2}{5}, \tan b = \frac{3}{7}$ $(0 < a, b < 1v)$. Tìm a + b.

b) Cho $\tan a = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi\right)$ và $\tan b = 3\left(0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$

Tìm a + b.

c) $\text{tg}a = 1\frac{2}{3}$, $\text{tg}b = \frac{1}{4}$ $(0 < a, b < 1v)$. Tìm a − b.

4. Chứng minh rằng nếu các góc của ΔABC thỏa mãn một trong các đẳng thức sau, thì ΔABC cân.

a) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\text{cotg}^2 A + \text{cotg}^2 B\right)$;

b) $\frac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$;

c) $a + b = \tan\frac{C}{2}(a.\tan A + b.\tan B)$

d) $\tan A + 2\tan B = \tan A.\tan^2 B$

Công thức nhân đôi, nhân ba

5. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\cos^4 a - 6\sin^2 a\cos^2 a + \sin^4 a$; b) $\cos^2 a - 4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}$.

c) $8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$

d) $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ$

6. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\tan^2 36^\circ\tan^2 72^\circ = 5$;

b) $\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \frac{1}{4}\cos 3a$

Áp dụng để tính : $\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}$

c) $\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}\left(a \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)$;

d) $\tan a\tan\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$

Áp dụng để chứng minh : $\tan 6^\circ\tan 54^\circ\tan 66^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

7. a) Cho $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ $(ab > 0)$. Tìm $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\tan2\alpha$.

b) Cho $\cos\alpha = \frac{2a}{1+a^2}$. Tìm $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\tan2\alpha$.

c) Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{5}{4}$. Tìm $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\tan2\alpha$.

8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm sau :

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos^4x - \sin^4x$

c) $y = 1 - 8\sin^2x\cos^2x$.

Công thức hạ bậc

9. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}}$ $(0 \le \alpha < \pi)$. b) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}}$ $(0 \le \alpha \le \pi)$.

c) $\dfrac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{1 + \cot^2\frac{\alpha}{2}}$ d) $\dfrac{\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha}{4} + \tan\frac{\alpha}{4}}$.

10. Chứng minh các hằng đẳng thức sau

a) $\sin a(\sin a + \sin b) + \cos a(\cos a + \cos b) = 2\cos^2\frac{a-b}{2}$.

b) $(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}$.

c) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin a}} - \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin a}}$ $(0 < a < \pi)$.

11. Tìm giá trị biểu thức :

a) $\dfrac{\sin a}{3 - 2\cos a}$ biết $\tan\frac{a}{2} = 2$. b) $\dfrac{\tan a + \sin a}{\tan a - \sin a}$ biết $\tan\frac{a}{2} = \frac{2}{15}$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm :

a) $y = 2\cos2x + \sin^2x$; b) $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + (\sin x - \cos x)^2$

c) $y = 2\sin^2x - \cos2x$.

Công thức biến đổi tích thành tổng   Tổng thành tích

13. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\cos2a\cos^2a - \frac{1}{4}\cos4a - \frac{1}{2}\cos2a$ b) $\cos^23 + \cos^21 - \cos4\cos2$;

c) $\sin1^\circ + \sin91^\circ + 2\sin203^\circ(\sin112^\circ + \sin158^\circ)$;

d) $\cos35^\circ + \cos125^\circ + 2\sin185^\circ(\sin130^\circ + \sin140^\circ)$;

14. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2n - 1)a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n - 1)a} = \tan na$

b) $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}.\sin\dfrac{(n + 1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$.

c) $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\cos\dfrac{(n + 1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$.

15. 1) ΔABC là tam giác gì nếu có : $\begin{cases} \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 & (1) \\ \cos A \cos B = \sin^2\dfrac{C}{2} & (2) \end{cases}$

(Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1997).

2) a, b, c là các cạnh đối diện với các góc của ΔABC thỏa mãn điều kiện :

$2\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{b + c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$

Tìm góc A(ĐH Mỏ – Địa chất, năm 1997).

16. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta đều có :

$\sin A \sin B < \cos^2\dfrac{C}{2}$

(ĐH Quốc gia Hà Nội, khối D, năm 1997).

17. Chứng tỏ các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

a) $\sqrt{4\sin^4 x + \sin^2 2x} + 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ với $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

b) $4\cos^4 x + \cos^2 2x - 4\cos^2 x\cos 2x$

c) $\cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

d) $\sin^2 x + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$

18. Chứng minh trong mọi ΔABC, ta đều có :

a) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} - 1$

c) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$

d) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$

e) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A.\sin B.\cos C$.

19. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông ở A là

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

20. Chứng minh :

nếu các góc của ΔABC thỏa mãn điều kiện $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$

thì nó là tam giác đều.

III. LỜI GIẢI VẮN TẮT - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) Có $a = \frac{\pi}{4} + b \Rightarrow \tan a = \tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right)$

$$\Leftrightarrow \tan a = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan b}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b} \text{ (đpcm)}$$

Có $b = a - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan b = \tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan b = \frac{\tan a - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan a.\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan a - 1}{1 + \tan a} \text{ (đpcm)}$$

b) $a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(a + b) = 1 \Rightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} = 1$

$\Rightarrow \tan a + \tan b + \tan a.\tan b = 1$

Nên $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = \tan a + \tan b + \tan a.\tan b + 1 = 1 + 1 = 2$ (đpcm)

Dễ dàng ta có :

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a.\cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

Mà $a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cot(a + b) = 1$

Từ đó ta có : $\cot a\cot b - (\cot a + \cot b) = 1$

Mà $(1 - \cot a)(1 - \cot b) = 1 - (\cot a + \cot b) + \cot a\cot b = 1 + 1 = 2$ (đpcm)

2. $\tan(x + y) = \tan[(\alpha + x) - (\alpha - y)] = \frac{\tan(\alpha + x) - \tan(-y)}{1 + \tan(\alpha + x)\tan(\alpha - y)}$ (đpcm)

3. a) Dùng công thức $\tan(a + b)$, tìm được $a + b = \frac{\pi}{4}$

b) 225°; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{3\pi}{4}$.

4. a) Có đẳng thức tương đương

$$2\frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+\frac{\cos^2B}{\sin^2B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}-\frac{\cos^2A}{\sin^2A}=\frac{\cos^2B}{\sin^2B}-\frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2B.\sin^2A-\cos^2A.\sin^2B}{\sin^2A(\sin^2A+\sin^2B)}=\frac{\cos^2B.\sin^2A-\cos^2A.\sin^2B}{\sin^2B(\sin^2A+\sin^2B)}$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2B.\sin^2A-\cos^2A.\sin^2B)\left(\frac{1}{\sin^2A}-\frac{1}{\sin^2B}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2B\sin^2A-\cos^2A\sin^2B=0\ (1)\\ \dfrac{1}{\sin^2A}=\dfrac{1}{\sin^2B}\ (2)\end{array}\right.$$

Xét (1)

$\Leftrightarrow$ (cosB.sinA + cosA.sinB) (cosB.sinA − cosA.sinB) = 0

$\Leftrightarrow$ sin(A + B).sin(A − B) = 0 $\Leftrightarrow$ sin(A − B) = 0 $\Rightarrow$ A = B

$\Rightarrow$ ΔABC cân đỉnh C.

Xét (2) $\Leftrightarrow$ sin A = sin B $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}A = B \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân đỉnh } C\\ A = \pi - B \text{ (loại)}\end{array}\right.$

b) Theo giả thiết sin(A + C) = 2sinC.cosA

$\Leftrightarrow$ sinA.cosC + sinC.cosA = 2sinC.cosA

$\Leftrightarrow$ sinA.cosC − sinC.cosA = 0 $\Leftrightarrow$ sin(A − C) = 0 $\Rightarrow$ A = C (đpcm)

c) Có đẳng thức tương đương :

$$a\left(1-\tan A.\cot\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\tan B.\cot\frac{A+B}{2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left(1-\frac{\sin A.\cos\frac{A+B}{2}}{\cos A.\sin\frac{A+B}{2}}\right)=\sin B\left(\frac{\sin B.\cos\frac{A+B}{2}}{\cos B.\sin\frac{A+B}{2}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A\frac{\sin\frac{A+B}{2}.\cos A-\sin A.\cos\frac{A+B}{2}}{\cos A.\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$=\sin B\frac{\sin B.\cos\frac{A+B}{2}-\cos B.\sin\frac{A+B}{2}}{\cos B.\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan A.\sin\left(\frac{A+B}{2}-A\right)=\tan B.\sin\left(B-\frac{A+B}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{B-A}{2}=0\\ \tan A=\tan B\end{array}\right. \Rightarrow A=B$$

(đpcm).

d) Có đẳng thức tương đương

$$\tan A+\tan B=\tan B(\tan A\tan B-1) \Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan B$$

(chắc chắn $\tan A.\tan B \neq 1$)

$\Rightarrow \tan(A+B)=-\tan B \Leftrightarrow \tan C=\tan B \Rightarrow C=B$ (đpcm).

5. a) $\sin^4 a+\cos^4 a-6\sin^2 a.\cos^2 a=(\sin^2 a+\cos^2 a)^2-8\sin^2 a.\cos^2 a$

$$=1-2(2\sin a.\cos a)^2=1-2\sin^2 2a$$
$$=\sin^2 2a+\cos^2 2a-2\sin^2 2a$$
$$=\cos^2 2a-\sin^2 2a=\cos 4a$$

b) $\cos^2 a-\left(2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}\right)^2=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$

c) $\dfrac{8\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ.\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\dfrac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}$

$$=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\cot 10^\circ$$

d) $\dfrac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20}=\dfrac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}$

$$=\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ\cos 60^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ.\frac{1}{2}}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{16}$$

(vì 160° và 20° bù nhau, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$).

6. a) Ta nhận thấy : $\tan 72^\circ=\cot 18^\circ$, $\tan 36^\circ=\tan 2.18^\circ=\dfrac{2\tan 18^\circ}{1-\tan^2 18^\circ}$

$$\tan 36^\circ.\tan 72^\circ=\frac{2\tan 18^\circ.\cot 18^\circ}{1-\tan^2 18^\circ}=\frac{2}{1-\tan^2 18^\circ}\ (*)$$

Ta phải tính $\tan 18^\circ=\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}$, tức là phải tìm $\sin 18^\circ$.

Ta nhận thấy: $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ (góc phụ nhau)

$\Leftrightarrow \sin 2.18^\circ=\cos 3.18^\circ \Leftrightarrow 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0 \Rightarrow \sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (giải phương trình bậc 2 (ẩn là $\sin 18^\circ$), và bỏ nghiệm không thích hợp).

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Do có $\tan 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \Rightarrow \tan^2 18^\circ = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$

Thay vào (**)

$$\tan 36^\circ \tan 72^\circ = \frac{2}{1 - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

Chú ý : dùng sin18°, cos18°, tan18°, ta có thể tính được giá trị hàm số lượng giác của các góc

$3^\circ\ (= 18^\circ - 15^\circ)$, $12^\circ\ (= 30^\circ - 18^\circ)$

$27^\circ\ (= 45^\circ - 18^\circ)$, $33^\circ (= 18^\circ + 15^\circ)$, $42^\circ\ (= 60^\circ - 18^\circ)$

b) $\cos a \left(\cos\dfrac{\pi}{3}.\cos a + \sin\dfrac{\pi}{3}.\sin a \right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}.\cos a - \sin\dfrac{\pi}{3}.\sin a \right)$

$$= \cos a \left(\frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a \right)\left(\frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a \right)$$

$$= \cos a \left(\frac{1}{4}\cos^2 a - \frac{3}{4}\sin^2 a \right) = \cos a \left[\frac{1}{4}\cos^2 a - \frac{3}{4}\left(1 - \cos^2 a\right) \right]$$

$$= \cos a \left(\cos^2 a - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4}(4\cos^3 a - 3\cos a) = \frac{1}{4}\cos 3a.$$

Suy ra $\cos\dfrac{\pi}{18}.\cos\dfrac{5\pi}{18}.\cos\dfrac{7\pi}{18} = \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

(ở đây $a = \dfrac{\pi}{18}$)

c) $\tan(a + 2a) = \dfrac{\tan a + \tan 2a}{1 - \tan a \tan 2a} = \dfrac{\tan a + \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}{1 - \tan a \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}$ (dpcm).

d) $\tan a \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} - \tan a}{1 + \tan\dfrac{\pi}{3}\tan a} . \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} + \tan a}{1 - \tan\dfrac{\pi}{3}\tan a} = \tan a \dfrac{3 - \tan^2 a}{1 - 3\tan^2 a}$

$$= \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} = \tan 3a \text{ (xem câu c)}$$

Ta có $\tan 6^\circ \tan 54^\circ \tan 66^\circ = \tan 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ (ở đây a = 6°, áp dụng kết quả trên và câu a).

7. a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{a^2 - 6ab + b^2}{(a+b)^2}$

$\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2a} = \pm\dfrac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pm\dfrac{4(a-b)\sqrt{ab}}{a^2 - 6ab + b^2}$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{6a^2 - 1 - a^4}{(1+a^2)^2}$

$\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2a} = \pm\dfrac{4a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}$

$\tan 2\alpha = \pm\dfrac{4a(a^2-1)}{a^4 - 6a^2 + 1}\left(= \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)$

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \dfrac{25}{16} <> 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{25}{16}$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{9}{16}; \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm\dfrac{5}{16}\sqrt{7}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pm\dfrac{9}{175}\sqrt{175}$

8. a) $y = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) =$

$= -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) <> -2y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right)$

Vì $-1 \le \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) < 1 <> -1 < -2y < 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2} => \min y = -\dfrac{1}{2}, \max y = \dfrac{1}{2}.$

b) $y = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x.$

Vì $|\cos 2x| \le 1 <> |y| < 1 <> -1 < y \le 1$

$\Rightarrow \min y = -1, \max y = 1.$

c) $y = 1 - 2\sin^2 2x = \sin^2 2x + \cos^2 2x - 2\sin^2 2x =$

$= \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x => \min y = -1, \max y = 1$

9. a) $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \cos\dfrac{\alpha}{4}$

(có $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ và $0 < \dfrac{\alpha}{4} < \dfrac{\pi}{4}$)

b) $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\frac{\alpha}{4}$

2

c) $\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\dfrac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{2}{\tan\frac{\alpha}{2}} : \dfrac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$.

d) $\dfrac{\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} - \tan\frac{\alpha}{2}}{\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \tan\frac{\alpha}{4}} = \dfrac{\dfrac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha$.

10. a) , b) Xem ví dụ 1, câu c.

c) $1-\sin a = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$

$1+\sin a = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$

Thay vào mẫu và chú ý rằng $0 < a < \pi$, biểu thức thành :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\sqrt{1+\sin a}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}{|\cos a|}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}{\cos a}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\right]}{\cos a}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}{\cos a}=\frac{\sqrt{2}\sin a}{\cos a}=\sqrt{2}\tan a .$$

11. Đặt $\tan\frac{a}{2} = t$

a) $A = \dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{3 - 2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \dfrac{2t}{1+5t^2} = \dfrac{4}{21}$.

b) $B = \dfrac{\tan a(1+\cos a)}{\tan a(1-\cos a)} = \dfrac{1+\cos a}{1-\cos a} = \dfrac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2}} = \cot^2\dfrac{a}{2} = \dfrac{15}{4}$.

12. a) $y = 2\cos 2x + \dfrac{1-\cos 2x}{2} \Leftrightarrow 2y = 3\cos 2x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{2y-1}{3} = \cos 2x$

Vì $|\cos 2x| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2y-1}{3}\right| < 1$

$-1 < \dfrac{2y-1}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 2 \Rightarrow \min y = -1;\ \max y = 2$

b) $y = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 3\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{3}y$ mà $0 < \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) < 1$ nên

$0 \le \dfrac{1}{3}y \le 1 \Rightarrow \min y = 0;\ \max y = 3$

c) $y = 1 - \cos 2x - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1-y}{2}$

Do $|\cos 2x| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-y}{2}\right| < 1 \Rightarrow \min y = -1;\ \max y = 3$.

13. a) $\cos 2a\left(\cos^2 a - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{4}(2\cos^2 2a - 1)$

$= \cos 2a\left(\dfrac{1+\cos 2a}{2} - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cos^2 2a + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1+\cos 6}{2} + \dfrac{1+\cos 2}{2} = \dfrac{1}{2}(\cos 6 + \cos 2) + 1$

c) $\sin 203^\circ = \sin(180^\circ + 23^\circ) = -\sin 23^\circ$;
$\sin 91^\circ = \sin(90^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$; $\sin 112^\circ = \sin 68^\circ$; $\sin 158^\circ = \sin 22^\circ$
Có $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ - 2\sin 23^\circ(\sin 68^\circ + \sin 22^\circ) =$
$= \sin 1^\circ + \cos 1^\circ - (2\sin 23^\circ.\sin 68^\circ.2\sin 23^\circ.\sin 22^\circ)$
$= \sin 1^\circ + \cos 1^\circ + \cos 91^\circ - \cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos 1^\circ$
$= \sin 1^\circ + \cos(90^\circ + 1^\circ) = \sin 1^\circ - \sin 1^\circ = 0$

d) $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$, $\sin 185^\circ = \sin(180^\circ + 5^\circ) = -\sin 5^\circ$

$\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$, $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$

Có: $\cos 35^\circ - \cos 55^\circ - 2\sin 5^\circ(\sin 50^\circ + \sin 40^\circ)$

$= \cos 35^\circ - \cos 55^\circ - 2\sin 5^\circ \sin 50^\circ - 2\sin 5^\circ \sin 40^\circ$

$= \cos 35^\circ - \cos 55^\circ + \cos 45^\circ - \cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos 35^\circ = 0$

14. a) Nhân cả tử và mẫu với 2sina ($a \neq k\pi$)

$$\frac{2\sin^2 a + 2\sin a.\sin 3a + 2\sin a.\sin 5a + \ldots + 2\sin a.\sin(2n-1)a}{2\sin a.\cos a + 2\sin a.\cos 3a + 2\sin a.\cos 5a + \ldots + 2\sin a.\cos(2n-1)a}$$

$$= \frac{(1-\cos 2a) + (\cos 2a - \cos 4a) + (\cos 4a - \cos 6a) + \ldots + \left[\cos(2n-2)a - \cos 2na\right]}{\sin 2a + (\sin 4a - \sin 2a) + (\sin 6a - \sin 4a) + \ldots + \left[\sin 2na - \sin(2n-2)a\right]}$$

$$= \frac{1-\cos 2na}{\sin 2na} = \frac{2\sin^2 na}{2\sin na.\cos na} = \tan na$$

b) $$\frac{2\sin a\sin\frac{a}{2} + 2\sin 2a\sin\frac{a}{2} + \sin 3a\sin\frac{a}{2} + \ldots + \sin na\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2} + \cos\frac{5a}{2} - \cos\frac{7a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)a - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{2\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)a}{2\sin\frac{a}{2}}$$

= đpcm.

c) $$\frac{2\sin\frac{a}{2}.\cos a + 2\sin\frac{a}{2}.\cos 2a + 2\sin\frac{a}{2}.\cos 3a + \ldots + 2\sin\frac{a}{2}.\cos na}{2\sin\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{3a}{2} - \sin\frac{a}{2} + \sin\frac{5a}{2} - \sin\frac{3a}{2} + \sin\frac{7a}{2} - \sin\frac{5a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)a}{2\sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}}$$ (đpcm).

15. 1) Biến đổi (1)

$$2\sin\frac{3(A+B)}{2}.\cos\frac{3(A-B)}{2}+2\sin\frac{3C}{2}.\cos\frac{3C}{2}=0 \ (1)$$

Vì A, B, C là ba góc của ΔABC nên : $A = B = 180^\circ - C$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(A+B) = 270^\circ - \frac{3}{2}C$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3}{2}(A+B) = \sin(270^\circ - \frac{3}{2}C)$$

Ta cũng có : $C = 180^\circ - (A+B) \Leftrightarrow \frac{3}{2}C = 270^\circ - \frac{3}{2}(A+B)$

$$\Rightarrow \sin\frac{3C}{2} = -\cos\frac{3}{2}(A+B)$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow -2\cos\frac{3}{2}C\left[\cos\frac{3}{2}(A-B)+\cos\frac{3}{2}(A+B)\right]$

$$\Leftrightarrow -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0 \Rightarrow$$

- hoặc $\cos\frac{3A}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3A}{2} = 90^\circ \Rightarrow A = 60^\circ$ (1a)
- hoặc $\cos\frac{3B}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3B}{2} = 90^\circ \Rightarrow P = 60^\circ$ (1b)
- hoặc $\cos\frac{3C}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3C}{2} = 90^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$ (1c)

Biến đổi (2) : $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 1 - \cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Rightarrow \cos(A-B) = \cos 0^\circ \Rightarrow A = B.$

Kết hợp với (1a), hoặc (1b), hoặc (1c), ta được ΔABC là tam giác đều.

2) Thay các cạnh theo định lí hàm sin, ta có đẳng thức tương đương :

$$2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \cos\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 30^\circ$$

$\Rightarrow A = 60^\circ.$

16. Có đẳng thức tương đương :

$$\frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] < \frac{1}{2}\left[1 - \cos(A+B)\right] = \frac{1}{2}(1 + \cos C) = \cos^2\frac{C}{2}.$$

17. a) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 4\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 4\sin^2 x$

$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 2(1 + \sin x)$

Biểu thức thành : $2|\sin x| + 2 + \sin x = -2\sin x + 2 + 2\sin x = 2$

(vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin x < 0$).

b) $(2\cos^2 x - \cos 2x)^2 = (1 + \cos 2x - \cos 2x)^2 = 1$

c) $\cos^2 x + \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2}$

$= \cos^2 x + 1 + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2}$

$\cos^2 x + 1 + \cos\frac{2\pi}{3}\cos 2x = \cos^2 x + 1 - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 - \frac{1}{2}\text{co}$

d) $\sin^2 x + \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)}{2}$

$= \sin^2 x + 1 - \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)}{2}$

$\sin^2 x + 1 - \cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x$

$= \sin^2 x + 1 - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cos 2x = \sin^2 x + 1 + \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{3}{2}$.

18. a) $2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A - B}{2} - \cos\frac{A + B}{2}\right) =$ dpcm

b) $2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{A + B}{2}\right) - 1 =$ dpcm

c) $2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C =$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)] =$ dpcm.

d) $2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 1 = $ đpcm

e) $\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} - \sin^2 C = 1 - \sin^2 C - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2}$

$= \cos^2 C - \cos(A+B)\cos(A-B)$

$= \cos C[-\cos(A+B) + \cos(A-B)] = 2\sin A.\sin B.\cos C.$

19. Điều kiện cần : ΔABC vuông ở A thì có hệ thức

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

Thật vậy. Vì A = 1v nên B và C phụ nhau :

$\sin A = 1$, $\sin B = \cos C$, $\sin C = \cos B$.

Do đó : $\frac{\sin B + \cos B}{\cos B + \sin B} = 1 = \sin A$ (đpcm).

Điều kiện đủ : ΔABC có các góc thỏa mãn:

$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ thì tam giác đó vuông ở A.

Thật vậy. Có : $2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ$

$\Leftrightarrow$ A = 1V (đpcm)

20. Có $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} - \frac{3}{2} = 0$

$4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 = 0 (*)$

Phương trình (*) ẩn $\sin\frac{C}{2}$ phải có nghiệm nên

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4\left(\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 1 \Rightarrow A = B$

Lúc này phương trình (*) có nghiệm kép (vì $\Delta' = 0$):

$\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}$ (vì A = B)

$\Rightarrow \frac{C}{2} = 30^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$

ΔABC có A = B và C = 60° nên nó là tam giác đều.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}=$$

$$=\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$$

(Trích đề thi vào HV Quan hệ quốc tế – A – 2000)

2. Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\geq 9$

b) Xác định dạng của tam giác ABC biết rằng :

$(1+\cot A)(1+\cot B)=2$

(Trích đề thi ĐHSP Vinh – 2000)

3. Gọi a, b, c là các cạnh đối diện với các góc của ΔABC. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu có các điều kiện sau :

$$\begin{cases}\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \quad (1)\\ a=2b\cos C \quad (2)\end{cases}$$

(Đề thi vào các trường ĐH năm 1981).

4. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot A+\cot B+\cot C)=\sqrt{3}$$

(Trích đề thi vào Đại học Bách khoa – 1999).

5. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của tổng các bình phương các nghiệm của phương trình bậc hai :

$$x^2-(3\sin a-\cos a)x-4-4\cos 2a=0$$

(khi tham số a biến thiên).

6. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A=\sin^2 50^\circ+\sin^2 70^\circ-\cos 50^\circ.\cos 70^\circ$.

(Trích đề thi ĐH An ninh 2001)

b) $B=\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ.\tan 40^\circ$

c) $C=\sin\frac{3\pi}{10}.\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}.\sin\frac{3\pi}{10}$

d) $D=\cos^2 a+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)$

7. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sin\frac{x+y}{2} > \frac{1}{2}(\sin x + \sin y) \text{ với } x > 0,\ y < \pi.$$

8. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$$

(Trích đề thi vào Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh – A, B – 2000)

9. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là :

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R}$$

(Trích đề thi vào Đại học Kiến trúc Hà Nội – 2000)

Giải:

Áp dụng định lý sin trong ΔABC biến đổi tương đương điều kiện đã cho ta có

10. Chứng minh ta có bất đẳng thức $\sin A + \sin B + \sin C < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ với mọi ΔABC.

11. Chứng minh với mọi ΔABC, ta có bất đẳng thức :

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

12. 1) Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, ta luôn luôn có :

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C < \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

(ĐH An ninh, khối D, năm 1997)

2) Chứng minh $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ với mọi ΔABC.

(ĐH Đà Nẵng, khối B năm 1997)

13. 1) Chứng minh rằng nếu các cạnh và các góc của ΔABC thoả mãn hệ thức $\cos A + \cos B = \frac{b+c}{a}$ thì tam giác đó là tam giác vuông.

(ĐH Kiến trúc, cơ sở Thủ Đức, năm 1997)

2) Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện $\cos C(\sin A - \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$.

Hãy tính $\cos A + \cos B$.

(ĐH Nông nghiệp I – A – 2000)

3) Cho tam giác ABC với BC = a ; AC = b ; AC = c và có $5\tan\frac{A}{2}.\,\mathrm{an}\frac{B}{2} = 1$

Chứng minh rằng $3c = 2(a + b)$.

(ĐH Cần Thơ – D – 2000)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Trong tam giác ABC ta có $\frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A+B}{2}$

nên $\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A+B}{2} = \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$

Vậy $\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}} = \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} \Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

Suy ra điều phải chứng minh là :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

Biến đổi vế trái ta có :

$$\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$

Vế trái "=" vế phải nên đẳng thức trên là đúng.

2. a) $\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$

$$= \dfrac{1 + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} \Rightarrow \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} + 1 = \dfrac{2}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$$

Do đó bất đẳng thức phải chứng minh $\Leftrightarrow$

$$2\left(\dfrac{1}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} + \dfrac{1}{1 - \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right) \geq 9$$

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1 \ \forall \Delta ABC$ (ví dụ 4)

$\Rightarrow 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2};\ 1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2};\ 1 - \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} > 0$

Do đó theo côsi ta có :

$$\left(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right)\geq 9$$

$$2\left(\frac{1}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right)\geq 9 \text{ (đpcm)}$$

b) $(1 + \cot A)(1 + \cot B) = 2 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\tan A}\right)\left(1+\frac{1}{\tan B}\right)=2$

$\Leftrightarrow (\tan A + 1)(\tan B + 1) = 2\tan A.\tan B$

$\Leftrightarrow \tan A.\tan B + (\tan A + \tan B) + 1 = 2\tan A.\tan B$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -(1 - \tan A.\tan B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -1 \Leftrightarrow \tan(A + B) = -1$

$\Leftrightarrow A + B = \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy ΔABC có góc $C = \dfrac{\pi}{4}$

3. $\left.\begin{array}{l}(1) \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2 \\ \text{Theo Định lý hàm số cosin } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A\end{array}\right\}\cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$

Áp dụng định lí hàm sin vào (2)

$2R\sin A = 4R\sin B.\cos C \Leftrightarrow \sin(B + C) = 2\sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \sin B.\cos C + \sin C.\cos B = 2\sin B.\cos C$

$\Leftrightarrow \sin C.\cos B - \sin B.\cos C = 0 \Leftrightarrow \sin(C - B) = 0 \Rightarrow B = C.$

ΔABC có $A = 60^\circ$ và $B = C$ nên ΔABC là tam giác đều.

4. $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sin A}-\cot A\right)+\left(\dfrac{1}{\sin B}-\cot B\right)+\left(\dfrac{1}{\sin C}-\cot C\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos A}{\sin A}+\dfrac{1-\cos B}{\sin B}+\dfrac{1-\cos C}{\sin C}=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3} \ (1)$$

Ta sẽ chứng minh (1) là điều kiện cần và đủ để ΔABC đều.

Trong ví dụ 3, §3, ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2$$

$$= \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$= \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2 \geq \left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right) + 2$$

$$= 3$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \qquad (2)$$

Dấu = ở (2) xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

⇒(1) là điều kiện cần và đủ để ΔABC đều (đpcm).

5. Trước hết phải có điều kiện :

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 2a \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 a \geq 0$, suy ra phương trình có nghiệm ∀a.

Theo định lí Viet ;

$$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3\sin a - \cos a)^2 + 8(1 + \cos 2a)$$

$$= 13 - 4\cos 2a - 3\sin 2a \Leftrightarrow S - 13 = 4\cos 2a - 3\sin 2a$$

Theo BĐT Bunhiacôpxki : $(4\cos 2a - 3\sin 2a)^2 \leq 4^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (S - 13)^2 \leq 25 \Leftrightarrow |S - 13| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq S - 13 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq S \leq 18 \Rightarrow \min S = 8;\ \max S = 18.$$

6. a) $A = \dfrac{1 - \cos 100^\circ}{2} + \dfrac{1 - \cos 140^\circ}{2} - \dfrac{\cos 120^\circ + \cos 20^\circ}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[2 - (\cos 100^\circ + \cos 140^\circ) - (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 2\cos 120^\circ\cos 20^\circ - \cos 120^\circ - \cos 20^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \cos 20^\circ + \frac{1}{2} - \cos 20^\circ\right) = \frac{5}{4}$$

b) $B = \dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \dfrac{\sqrt{3}\left[\dfrac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\right]}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}\left(\cos 20^\circ - \dfrac{1}{2}\right)}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}(1 + \cos 20^\circ - \dfrac{1}{2})}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3}(\dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ)}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3}(\dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ)}{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}(\dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ)}{\dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ} = \sqrt{3}$$

c) $C = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\pi\right) + \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\pi\right)$

$C = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\pi + \cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\pi\right) = 0$

d) $D = \dfrac{1 + \cos 2a}{2} + \dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2a\right)}{2} + \dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} - 2a\right)}{2}$

$$D = \frac{3 + \cos 2a + 2\cos\dfrac{4\pi}{3}\cos 2a}{2} = \frac{3}{2}.$$

7. Xét hiệu :

$$\sin\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \sin\frac{x+y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$= \sin\frac{x+y}{2}\left(1 - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{4}$$

với $0 < x, y < \pi \Rightarrow 0 < \dfrac{x+y}{2} < \pi$ nên $2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin^2\dfrac{x-y}{4} \geq 0$ và bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu = xảy ra khi x = y.

Chú ý : Bằng cách chứng minh tương tự, ta có các bất đẳng thức sau :

1) $\cos\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y)$ với $-\dfrac{\pi}{2} < x, y < \dfrac{\pi}{2}$

Dấu = xảy ra khi x = y.

2) $\tan\frac{x+y}{2} \le \frac{1}{2}(\tan x + \tan y)$ với $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

Dấu = xảy ra khi x = y.

3) $\cot\frac{x+y}{2} \le \frac{1}{2}(\cot x + \cot y)$ với $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

Dấu = xảy ra khi x = y.

8. Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên A, B, C > 0 và A + B + C = 180°.

Ta có $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)$ vì

$$\sin\frac{A}{2} > 0,\ \cos\frac{B-C}{2} < 1,\ \cos\frac{B+C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

nên $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$

Ta đã biết hàm số y = x(1 − x) có cực đại là $\frac{1}{24}$

nên $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

(đẳng thức xảy ra khi A = B = C).

Đặt $x = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}, y = \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}, z = \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$ thì x, y, z > và $\sqrt[3]{x.y.z} \ge 2$

Vậy:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) =$$

$= (1 + x)(1 + y)(1 + z)$

$= 1 + x + y + z + x.y + y.z + x.z + x.y.z$

$\ge 1 + 3\sqrt[3]{x.y.z} + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + x.y.z \ge (1+2)^3 = 27$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z $\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow$ A = B = C

$\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

9. Áp dụng định lý sin trong ΔABC và biến đổi tương đương điều kiện đã cho ta có :

$$\frac{2R\sin A.\cos A + 2R\sin B.\cos B + 2R\sin C.\cos C}{2R\sin^2 A + 2R\sin^2 B + 2R\sin^2 C} = \frac{2p}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{2p}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(A+B).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9}$$

do $C = 180^\circ - (A + B)$ nên ta có :

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C\big(\cos(A-B) - \cos(A+B)\big)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9}$$

$$\frac{4\sin A.\sin B.\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9}$$

$\Leftrightarrow 9\sin A.\sin B.\sin C = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\sin A + \sin B + \sin C)$

$\geq 3\sqrt[3]{\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}.\,3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

10. $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^\circ \leq 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{C+60^\circ}{2}$

$$\leq 2\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C+60^\circ}{2}\right)$$

$$\leq 4\sin\frac{A+B+C+60^\circ}{4}$$

$\leq 4\sin 60^\circ \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin 60^\circ$

$\leq 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$ (đpcm)

Dấu = xảy ra khi $A = B,\ C = 60^\circ \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{C+60^\circ}{2}$

$\Rightarrow A = B = C = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Các bài từ 11 → 13 HS tự làm

Phần II.

HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

VECTƠ

§1. VECTƠ VÀ MỘT SỐ PHÉP TOÁN

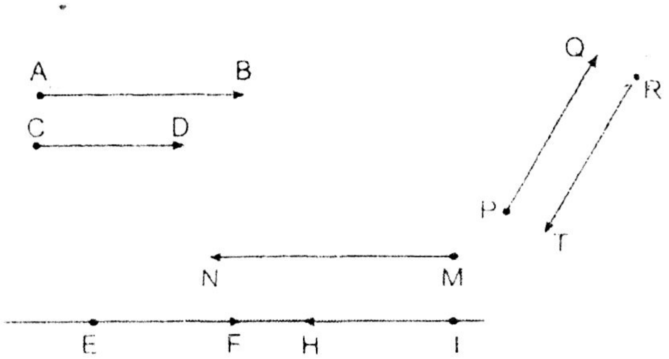
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng, kí hiệu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \vec{a}, \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có *điểm đầu* là A *điểm cuối* là B *hướng* từ A đến B có *độ dài* là *độ dài* đoạn thẳng AB, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$ hoặc AB, có *giá* là đường thẳng AB.

- Hai vectơ cùng phương, cùng hướng. Trên hình 1. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RT}$; $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HI}$ là các cặp vectơ cùng phương.

- Vậy hai vectơ cùng phương nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng ($\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HI}$)



Hình 1

Cũng trên hình 1, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ *là hai vectơ cùng hướng.*

Hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RT}$ *hay* $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ *là hai vectơ ngược hướng.*

Vậy hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.

- *Hai vectơ bằng nhau*

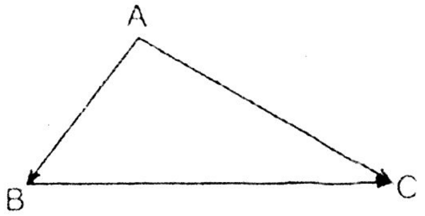
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng với } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ (cùng độ dài).} \end{cases}$$

- *Hai vectơ đối nhau*

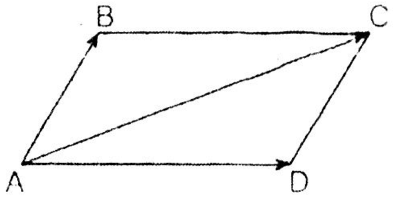
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ (cùng độ dài).} \end{cases}$$

- *Vectơ không* $(\vec{0})$

- *Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, chẳng hạn* $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ *quy ước gọi là vectơ* $\vec{0}$ *có hướng bất kì và có độ dài bằng 0.*



Hình 2



Hình 3

2. Tổng của các vectơ

- *Quy tắc ba điểm :*

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- *Quy tắc tam giác : (h. 2)*

- *Quy tắc hình bình hành:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (h.3)

3. Phép trừ vectơ

- *Quy tắc tam giác* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

- *Quy tắc hiệu vectơ:* Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho thì ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ (O là điểm bất kì)

4. Phép nhân vectơ với một số: $\vec{a} \neq \vec{0}$, $p \in R$,

$$p\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} p\vec{a} \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ nếu } p > 0 \text{, ngược hướng với } \vec{a} \text{ nếu } p < 0 \\ |p\vec{a}| = |p||\vec{a}| \end{cases}$$

5. Điều kiện cộng tuyến của hai vectơ

Vectơ $\vec{b}$ cùng phương (cộng tuyến) với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại một số thực p sao cho $\vec{b} = p\vec{a}$

Ví dụ 1. 1) Chứng minh rằng nếu điểm G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ (O là điểm bất kì).}$$

2) Chứng minh rằng nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm ΔABC.

3) Nếu G, H, O theo thứ tự là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh :

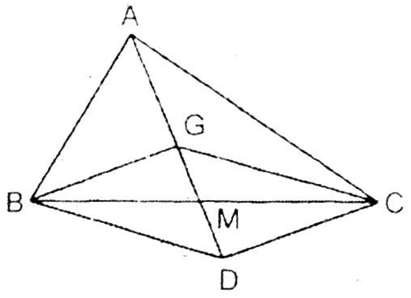
a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$; b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}$

Giải. 1) G là trọng tâm của ΔABC

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Thậy vậy $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ (D là đỉnh của hình bình hành BGCD).

Dễ dàng chứng minh được GD = GA (do G là trọng tâm của ΔABC và MG = MD (M là trung điểm của cạnh BC và là giao điểm đường chéo của hình bình hành BGCD) nên $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GD}$. Do đó ta có :



Hình 4

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

2) Gọi G' là trọng tâm của ΔABC. Theo giả thiết $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$

Theo chứng minh trên G' là trọng tâm của ΔABC thì

$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ suy ra $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$,

hay G là trọng tâm của ΔABC.

3) a) Ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$ (quy tắc hình bình hành), (M là trung điểm của BC).

Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O) dễ dàng chứng minh được BHCA' là hình bình hành $\Rightarrow$ ba điểm H, M, A' thẳng hàng.

Ta có $OM = \frac{1}{2}AH$ (do OM là đường trung bình của $\Delta AHA'$)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Vậy $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$

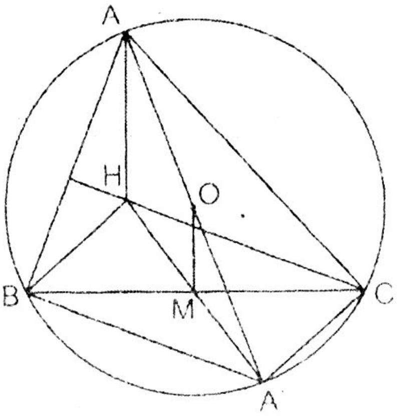
Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

(Sử dụng kết quả câu 1)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

$\Rightarrow$ 3 điểm O, G, H thẳng hàng.



Hình 5

b) Cũng áp dụng kết quả của câu (1) với O = H, ta có:

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$$

mà $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OG} \Rightarrow 3\overrightarrow{HG}=3\overrightarrow{HO}+3\overrightarrow{OG}$

Ta lại có $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ nên $3\overrightarrow{HG}=3\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{HO}$

Do đó $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{HO}$

Ta cần phải ghi nhớ những kết quả sau để giải toán.

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.
(Ba điểm A, B, C không thẳng hàng)[1].

2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ hoặc $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} \Leftrightarrow$ I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

3) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ hoặc $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow$ G là trọng tâm của ΔABC. (O là điểm bất kì).

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;   b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$ (O là điểm bất kì).

Giải. a) Biến đổi vế phải :

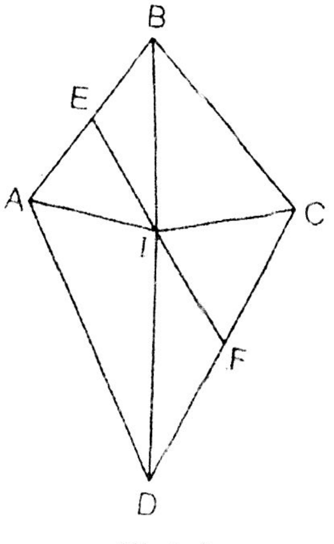
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\\&=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\ (\text{do } \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0})\end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái nên đẳng thức đúng.

b) Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD})\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\ (\text{do } \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}),\end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái nên đẳng thức đúng.



Hình 6

c) $+\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IE}\\ \overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IF}\end{cases}$ (quy tắc hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF})$ Vì I là trung điểm của EF.

nên $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$

---

[1] Điều kiện A, B, C không thẳng hàng chỉ dành cho mũi tên đi từ trái sang phải.

Do đó: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OD})=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-4\overrightarrow{IO}=4\overrightarrow{OI}$ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho lục giác đều ABCDEG. Cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ (O là tâm).

Giải. Rõ ràng $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ (quy tắc tam giác).

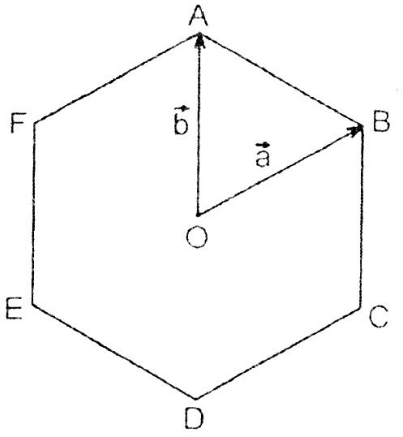
Vậy $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

Tứ giác OABC là hình bình hành (các cặp góc đối diện bằng nhau) nên $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD}$ là hai vectơ đối nhau, vì theo tính chất của lục giác đều ba điểm A, O, D thẳng hàng và OA = OD) nên $\overrightarrow{OD}=-\vec{a}$.

Tương tự:

$\overrightarrow{OE}=-\vec{b}, \overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OC}=\vec{a}-\vec{b}$



Hình 7

cũng do tứ giác OABC là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=-\vec{a}$.

Tương tự: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow\overrightarrow{CD}=-\vec{b}, \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}, \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Từ ví dụ (1 – 3) là những bài toán chứng minh một đẳng thức vectơ, phương pháp chứng minh cũng giống phương pháp chứng minh một đẳng thức đại số nên những bài toán thông thường là biến đổi vế trái về vế phải hoặc ngược lại, hay biến đổi hai vế cùng bằng một biểu thức thứ ba. Muốn giải tốt loại toán này phải nắm vững những kiến thức trọng tâm đã trình bày đầu §1.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là tồn tại một số thực n sao cho $\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AB}$.

Giải. Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì AB//AC $\Rightarrow$ đường thẳng AB trùng với đường thẳng AC $\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

Ngược lại nếu A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá là một đường thẳng nên nó cùng phương. Xảy ra hai trường hợp :

Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng thì $\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\times\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$

Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng nhau thì $\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB}| \times \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$

Suy ra luôn luôn tìm được số n sao cho $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB}$.

III. BÀI TẬP

1. Hãy xét xem có tồn tại hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ hoặc $\vec{a}_1, \vec{b}_1$ tồn tại đồng thời hai bất đẳng thức :

a) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}|$ và $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{b}|$

b) $|\vec{a}_1 + \vec{b}_1| > |\vec{a}_1|$ và $|\vec{a}_1 + \vec{b}_1| > \vec{b}_1$.

2. Cho hai vectơ khác không $\vec{b}$ và $\vec{c}$. Chứng minh rằng :

$$\big||\vec{b}| - |\vec{c}|\big| < |\vec{b} + \vec{c}| < |\vec{b}| + |\vec{c}|.$$

3. Chứng minh rằng hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ cộng tuyến khi và chỉ khi tồn tại các số m, n không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn đẳng thức:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}.$$

4. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ $\vec{0}$ và đôi một không cộng tuyến. Hãy tính tổng của chúng, nếu $\vec{a} + \vec{b}$ cộng tuyến với vectơ $\vec{c}$, vectơ $\vec{b} + \vec{c}$ cộng tuyến với vectơ $\vec{a}$.

5. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

6. Cho các điểm A, B, C, D. Điểm M và N là trung điểm cạnh AB và CD. Điểm O là trung điểm của đoạn thẳng MN. Chứng minh với điểm S bất kì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

7. Cho 4 điểm khác nhau A, B, C, D. Trên các đoạn thẳng AC và BD theo thứ tự lấy các điểm M và N sao cho AM = λAC, BN = λBD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{CD}$.

8. Cho 4 điểm khác nhau A, B, C, D. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC và AD. Chứng minh rằng nếu:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD) \text{ thì } AB \,//\, CD.$$

9. Cho hình thang OABC. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; b) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

10. Cho tam giác ABC, điểm M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, AC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$; b) $\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

11. Cho hình thang ABCD (BC//AD) và tỉ số độ dài của $\frac{BC}{AD} = n$. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AO}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$.

12. Cho lục giác đều ABCDEF. Phân tích vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$.

13. OABC là hình thang, AM là trung tuyến của tam giác ABC. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

14. Tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

15. Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

16. Trong tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC và CA theo thứ tự lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{AC}$.

Chứng minh rằng trọng tâm của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trùng nhau.

17. Bốn điểm M, N, P, Q theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, OD, AD của hình bình hành ABCD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA}$. Chứng minh rằng MNPQ cũng là hình bình hành.

18. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau, trên đường thẳng a lấy các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho A_2 nằm giữa hai điểm A_1 và A_3, trên đường thẳng b lấy các điểm B_1, B_2, B_3 ; B_2 nằm giữa hai điểm B_1 và B_3, sao cho $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$.

Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 thẳng hàng.

19. Cho tam giác ABC, trên các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

20. Cho hình bình hành ABCD, trên các đường thẳng AD, AB theo thứ tự lấy các điểm F, E sao cho $AD = \frac{1}{2}AF$, $AB = \frac{1}{2}AE$. Chứng minh :

a) Ba điểm F, C, E thẳng hàng.

b) Các tứ giác BDCF, DBEC là hình bình hành.

21. Gọi a, b là độ dài các cạnh lần lượt đối diện với đỉnh A, B của tam giác vuông ABC ($\widehat{C} = 90^0$), CD là đường cao của tam giác ấy. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\overrightarrow{CB}$.

22. Cho tam giác ABC vuông ở A. Người ta dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACFG. Hai đường thẳng DE và FG cắt nhau tại K. Chứng minh :

a) D, A, E thẳng hàng ; b) Đường cao AH của tam giác ABC đi qua K.

23. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Các đoạn thẳng AN, BM, CK là độ dài ba đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a(b+c)\overrightarrow{AN} + b(a+c)\overrightarrow{BM} + c(a+b)\overrightarrow{CK} = \vec{0}.$$

24. Cho điểm O bất kì nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA} + S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB} + S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

25. Cho tam giác ABC. Xét hai điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$. Tìm tập hợp điểm P khi Q di động trên tia Cx.

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN

1. a) Dựng một hình bình hành sao cho một đường chéo có độ dài nhỏ hơn độ dài một cạnh. Điều này có thể làm được, chẳng hạn dựng hình thoi ABCD, $\widehat{A} > 120^0$ (h. 8a).

Gọi $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Trong ΔABC, $\widehat{BAC} > 60^0$, $\widehat{ACB} > 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ABC} < 60^0$, vậy $AC < AB$, $AC < BC$ hay

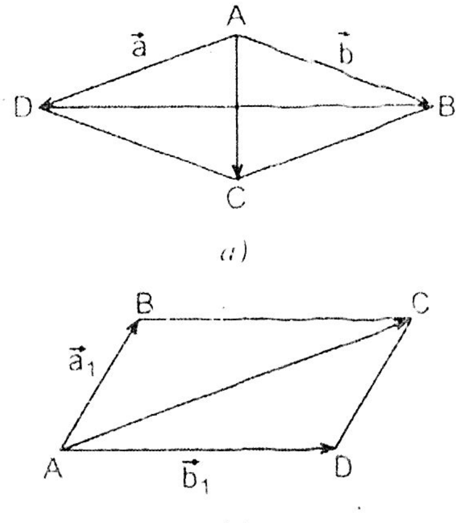
$|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}|$, $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{b}|$

b) Dựng một hình bình hành sao cho một đường chéo có độ dài lớn hơn độ dài của mỗi cạnh. Điều này dễ dàng làm được, chẳng hạn, dựng hình bình hành ABCD $\widehat{A} < 90^0$ (h. 8b).

Gọi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}_1 \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$.

Rõ ràng $\hat{B} > 90^0 \Rightarrow AC > AB$, $AC > BC$, suy ra :

$$|\vec{a}_1 + \vec{b}_1| > |\vec{a}_1|,\ |\vec{a}_1 + \vec{b}_1| > \vec{b}_1.$$

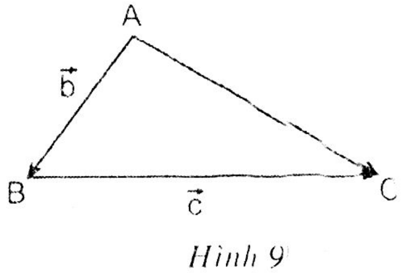


a)

b)

Hình 8

2. Trường hợp các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương dựng ΔABC. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ (điều này luôn làm được do $\vec{b}$ và $\vec{c} \neq \vec{0}$ và $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương). Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{c}$.



Hình 9

Theo bất đẳng thức tam giác ta có : AB − AC < AC < AB + BC ,

nên $\left||\vec{AB}| - |\vec{AC}|\right| < |\vec{AC}| < |\vec{AB}| + |\vec{AC}|$

hay $\left||\vec{b}| - |\vec{c}|\right| < |\vec{b} + \vec{c}| < |\vec{b}| + |\vec{c}|$

Trường hợp $\vec{b} \,//\, \vec{c}$

Dựng $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{BC} = \vec{c}$ thì A, B, C thẳng hàng

- $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$ thì $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ nên $\vec{AC} = \vec{b} + \vec{c}$

$|\vec{AC}| = |\vec{b} + \vec{c}|$, (1) và $|\vec{b}| + |\vec{c}| = AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

- $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ thì : $\left||\vec{b}| - |\vec{c}|\right| = |\vec{AC}|$ (3) $|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{AC}|$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $|\vec{b} + \vec{c}| = \left||\vec{b}| - |\vec{c}|\right|$

Do đó ta có $\left||\vec{b}| - |\vec{c}|\right| \le |\vec{b} + \vec{c}| \le |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

3. Điều kiện cần

Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ cộng tuyến thì tồn tại một số α và $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ở đây m = 1, n = −α thì ta có đẳng thức

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \qquad (1)$$

Điều kiện đủ

Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ và thỏa mãn đẳng thức (1), ở đây m, n không đồng thời bằng 0, chẳng hạn m ≠ 0 thì từ (1) ta có : $\vec{a} = -\dfrac{n}{m}\vec{b}$ suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cộng tuyến.

4. Theo giả thiết $\vec{a} + \vec{b}$ cộng tuyến với $\vec{c}$ thì tìm được số m duy nhất sao cho $\vec{a} + \vec{b} = m\vec{c}$ (1).

Tương tự với vectơ $\vec{b} + \vec{c}$ cộng tuyến với vectơ $\vec{a}$ ta cũng có $\vec{b} + \vec{c} = n\vec{a}$.

Do vectơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cộng tuyến nên n ≠ 0 suy ra $\vec{a} = \dfrac{1}{n}\vec{b} + \dfrac{1}{n}\vec{c}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta có : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\vec{b} = \left(m - \dfrac{1}{n}\right)\vec{c}$

Do $\vec{c}$, $\vec{b}$ là hai vectơ không cộng tuyến nên $1 + \dfrac{1}{n} = 0$ và $m - \dfrac{1}{n} = 0$. Suy ra n = −1, m = −1.

Thay vào (1) ta có: $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

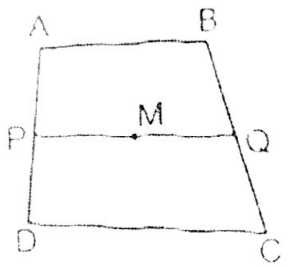
5. Nếu gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC vậy :

$$+\begin{array}{l}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MP}\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MQ}\end{array}$$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ})$

Muốn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

thì $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$ <=> M là trung điểm của PQ.



Hình 10

6. M là trung điểm của AB và N là trung điểm của CD, nên ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$ (quy tắc hình bình hành) nên

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$

Mà: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$ (do O là trung điểm của M, N).

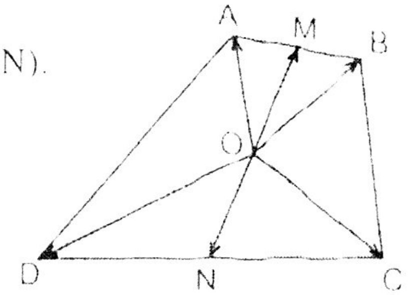
Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Ta lại có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}$

$$+\begin{array}{l}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}\\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}\\ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}\end{array}$$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.



Hình 11

7. $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{BN}{BD}=\lambda \Rightarrow AM=\lambda AC,\ BN=\lambda BD$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MN}=(\lambda-1)\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$ (1)

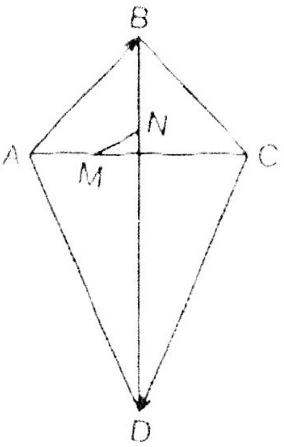
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ (3)

Theo (1) ta có : $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{CD}$ (4)

Thay (3) vào (4) ta có : $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{CD}$.

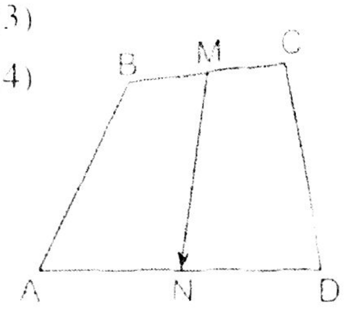


Hình 12

8.

$$+\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\end{array}$$

$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{AN})$



Hình 13

Vì M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AD, nên $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{AN}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vậy } |\overrightarrow{MN}|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}}{2}\right| \\ \text{Nếu } MN=\dfrac{AB+CD}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}|=AB+CD$$

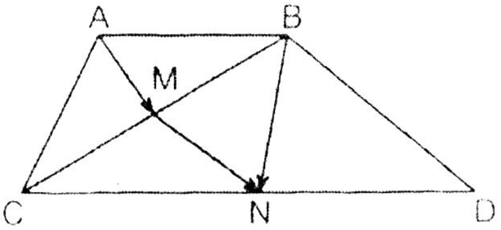
Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. Vậy AB//CD.

9. a) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB})$ (quy tắc hình bình hành)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (quy tắc tam giác)

Vậy $\overrightarrow{AM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2}$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



Hình 14

b) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}) \\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

c) $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

10. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$, $\overrightarrow{MN}=\vec{z}$

Vậy $\overrightarrow{BC}=2\vec{z}$ (do MN là đường trung bình của ΔABC).

Áp dụng quy tắc tam giác ta có: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

hay $\vec{y}-\vec{x}=2\vec{z}$ (1)

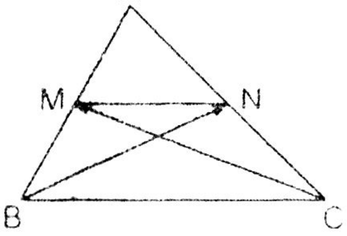
Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BN}$

hay $-\vec{y}-2\vec{z}=2\overrightarrow{CM}$ (2)

$-\vec{x}+2\vec{z}=2\overrightarrow{BN}$ (3)

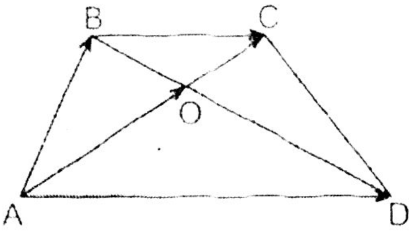


Hình 15

Từ (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases}\vec{y}-\vec{x}=2\vec{z} \\ -\vec{y}-2\vec{z}=2\overrightarrow{CM} \\ -\vec{x}+2\vec{z}=2\overrightarrow{BN}\end{cases}$ ⇔ (đpcm).

11. $\Delta BOC \sim \Delta DOA \Rightarrow \dfrac{OC}{OA}=\dfrac{BC}{AD}=n \Rightarrow \dfrac{OA}{OC+OA}=\dfrac{1}{1+n}$

Do $O \in AC \Rightarrow AO + OC = AC$ nên $\frac{OA}{AC} = \frac{1}{1+n} \Rightarrow OA = \frac{1}{1+n}AC$.



Hình 16

Do $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ cùng hướng nên

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1+n}\overrightarrow{AC}$

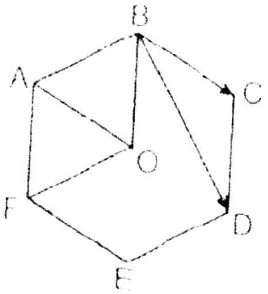
$\overrightarrow{BC}$ cùng hướng $\overrightarrow{AD}$ và $BC = nAD$

nên $\overrightarrow{BC} = n\overrightarrow{AD}$

Ta lại có:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{1+n}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$

Vậy ta có $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1+n}(\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD})$.



Hình 17

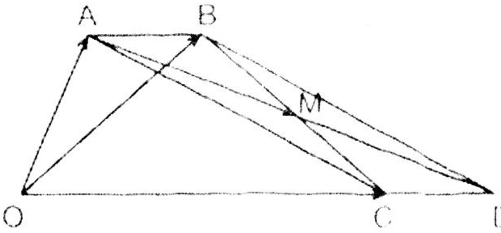
12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$ (O là tâm lục giác đều) (do FABO là hình bình hành (tính chất lục giác đều). Ta còn có : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO}$

Cũng do tính chất lục giác đều tứ giác ABCO là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$

Vậy $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$

Tương tự tứ giác BCDO là hình bình hành nên $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC}$. Do đó $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

13. Dễ dàng chứng minh được ABDC là hình bình hành nên



Hình 18

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$. Suy ra

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA})$.

14. G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, vì ΔABC đều nên $G \equiv O$ (tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác) nên ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Ngược lại trong một tam giác có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ thì O là trọng tâm của ΔABC mà O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên suy ra ΔABC đều.

15. Giả sử G là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và A'B'C' thì ta có :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C}$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}.$$

Ngược lại khi có $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ ta sẽ chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm. Thật vậy giả sử G là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ thì $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

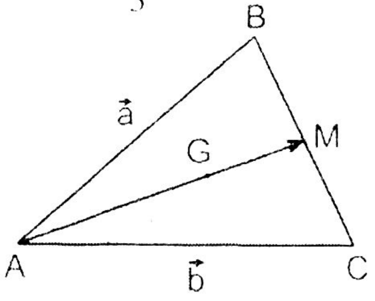
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tam giác Δ ABC (đpcm).

16. Giả sử đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$, nếu AM là một trung tuyến của ΔABC thì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, vậy



Hình 19

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad (1)$$

Đặt $\frac{AA_1}{AB}=m$

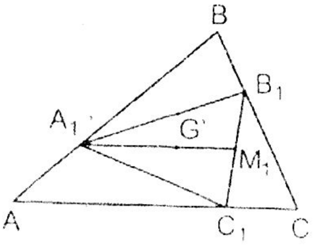
$\overrightarrow{A_1C_1}=(1-m)\vec{b}-m\vec{a}$

$\overrightarrow{A_1B_1}=(1-m)\vec{a}+m(\vec{b}-\vec{a})$

Giả sử A_1M_1 là một đường trung tuyến của $\Delta A_1B_1C_1$

$$\overrightarrow{A_1M_1}=\frac{1}{2}[((1-m)\vec{b}-m\vec{a})+((1-m)\vec{a}+m(\vec{b}-\vec{a}))]$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+(1-3m)\vec{a})$$



Hình 20

Giả sử G' là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1G_1}$ nên $\overrightarrow{A_1G'}=\frac{1}{3}(\vec{b}+(1-3m)\vec{a})$.

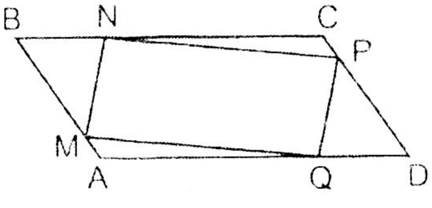
Tính vectơ $\overrightarrow{AG'}$. $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1G'}$

$\overrightarrow{AG'}=m\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+(1-3m)\vec{a}\right)=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ (2). So sánh (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG'} \Leftrightarrow G=G'$ (đpcm).

17. Giả sử $\frac{AM}{AB}=m$, ta có $\overrightarrow{AM} /\!/ \overrightarrow{AB}$

nên $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MB}=(1-m)\overrightarrow{AB}$



Hình 21

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = (1 - m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC}$ (1)

Tương tự như vậy ta có :

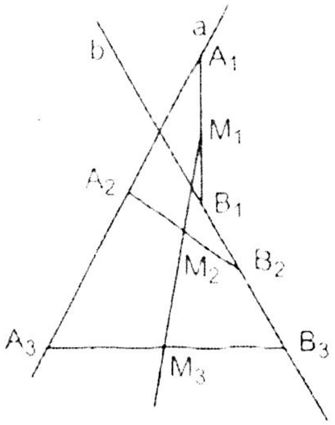
$$\overrightarrow{PC} = m\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{QD} = m\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = (1 - m)\overrightarrow{DC}$$

và $\overrightarrow{QP} = (1 - m)\overrightarrow{DC} + m\overrightarrow{AD}$ (2)

Do ABCD là hình bình hành <=> $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ <=> MNPQ là hình bình hành.

18. $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} = m \Rightarrow A_1A_2 = mA_2A_3$



Hình 22

$B_1B_2 = mB_2B_3$

Do A_1, A_2, A_3 cùng thuộc đường thẳng a và A_2 nằm giữa hai điểm A_1 và A_3 nên hai vec tơ $\overrightarrow{A_1A_2}$ và $\overrightarrow{A_2A_3}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{A_1A_2} = m\overrightarrow{A_2A_3}$. Tương tự :

$$\overrightarrow{B_1B_2} = m\overrightarrow{B_2B_3}$$

Gọi M_1, M_2, M_3 theo thứ tự là trung điểm của đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3

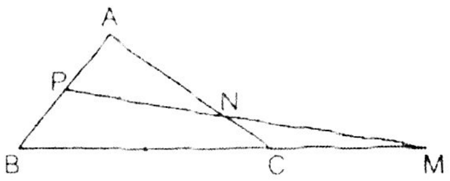
ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{2} = m\frac{\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{B_2B_3}}{2}$ (1)

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \frac{\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{B_2B_3}}{2} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = m\overrightarrow{M_2M_3}$

Vậy ba điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng.

19. a) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ <=> P là trung điểm của AB.



Hình 23

Gọi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{PB} = \frac{\vec{a}}{2}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$

Dễ dàng chứng minh được BC = 2CM mà $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CM}$

Vậy $\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$. Do đó $\overrightarrow{PM} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{PA} = -\frac{\vec{a}}{2}$$

$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (dễ dàng chứng minh được điều này)

$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$ (2)

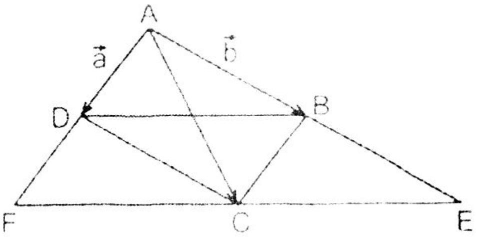
b) So sánh (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{PN}$ cộng tuyến $\Rightarrow$ ba điểm P, N, M thẳng hàng.

20. a) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ (quy tắc hình bình hành)

$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD} = 2\vec{a}$

(do $AD = \frac{1}{2}AF$ (gt)).



Hình 24

Vậy $\overrightarrow{FC} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a} = \vec{b} - \vec{a}$ (1)

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ (quy tắc ba điểm)

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{a}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ (do $AB = \frac{1}{2}AE$).

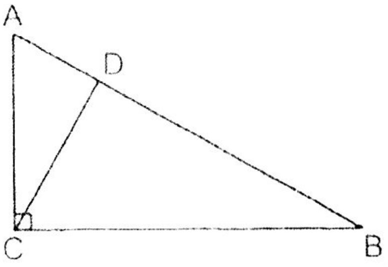
Vậy $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \vec{a}$. Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CE} \Rightarrow$ F, C, E thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$ (3). Từ (1) và (3) $\Rightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$ và D, B, E không thẳng hàng $\Rightarrow$ DBEC là hình bình hành.

Cũng chứng minh tương tự ta có DBCF là hình bình hành.

21. $CB^2 = BD.BA \Rightarrow BD = \frac{CB^2}{BA} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{CB^2}{BA^2}$.

$\frac{BD}{BA} = \frac{a^2}{b^2 + a^2} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{b^2 + a^2}\overrightarrow{BA}$



Hình 25

mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{b^2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$

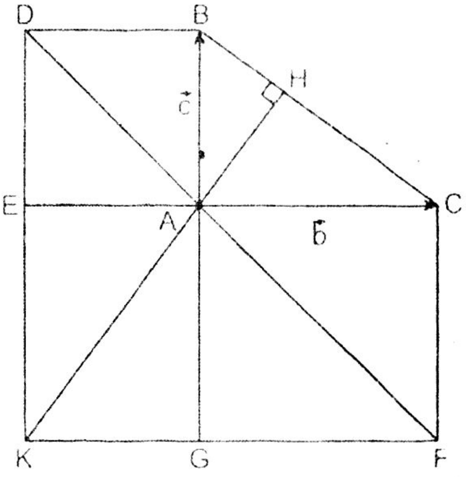
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{a^2}{b^2 + a^2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$

$= \frac{a^2}{a^2 + b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\overrightarrow{CB}$.

22. a) Đặt $\overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{c}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = m$.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{m}\vec{c}$



Hình 26

$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG} = \vec{b} + \frac{1}{m}\vec{c}$ (1)

(quy tắc hình bình hành)

$\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AC} = m\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \vec{c} + m\vec{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{AD} = m.\overrightarrow{AF} \Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AF}$ cộng tuyến suy ra ba điểm A, D, F thẳng hàng.

b) Dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{CH} = \frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{CB}$ (a = BC)

Muốn chứng minh đường cao AH đi qua K ta chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng. Thật vậy :

Không khó khăn lắm ta chứng minh được

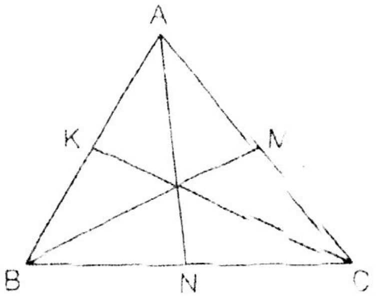
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AH} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2}\vec{b} + \dfrac{b^2}{b^2+c^2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AK} = \left(\dfrac{c}{b}\vec{b} + \dfrac{b}{c}\vec{c}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{AH} = n\overrightarrow{AK}\left(n = \frac{b.c}{c^2+b^2}\right)$$

suy ra điều phải chứng minh.

23. $\frac{NB}{NC} = \frac{c}{b}$ (tính chất của đường phân giác)

$\Rightarrow \frac{NB}{BC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC} = \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AN} = \frac{b}{c+b}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+b}\overrightarrow{AC}$



Hình 27

Tương tự $\overrightarrow{BM} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$

Từ đó suy ra $a(c+b)\overrightarrow{AN} = ab\overrightarrow{AB} + ac\overrightarrow{AC}$

$b(a+c)\overrightarrow{BM} = b.a.\overrightarrow{BA} + b.c.\overrightarrow{BC}$

$c(a+b)\overrightarrow{CK} = a.c.\overrightarrow{CA} + b.c.\overrightarrow{CB}$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên :

$a(b+c)\overrightarrow{AN} + b(a+c)\overrightarrow{BM} + c(a+b)\overrightarrow{CK}$

$$= \left(a.b\underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA})}_{0} + a.c\underbrace{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA})}_{0} + b.c\underbrace{(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC})}_{0}\right) = \vec{0}.$$

24. Gọi A' là giao điểm của AO và BC

Gọi B_1, C_1 là chân đường vuông góc lần lượt hạ từ B, C xuống đường thẳng AO : $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BB_1 \times OA}{CC_1 \times OA} = \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}$

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}}\overrightarrow{OB} + \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}}\overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

Mặt khác gọi A_1, O_1 là chân đường vuông góc lần lượt hạ từ A, O xuống BC : $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OO_1}{AA_1} = \frac{OO_1 \cdot BC}{AA_1 \cdot BC} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta BAC}}$

$$\Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta BAC} - S_{\Delta BOC}}$$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{OA'} = -\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta BAC} - S_{\Delta BOC}}\overrightarrow{OA} \qquad (2)$

Từ (1), (2) suy ra :

$$-\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BOC}}\overrightarrow{OA} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}}\overrightarrow{OB} + \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}}\overrightarrow{OC}$$

Từ đó : $S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA} + S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB} + S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Đó là đpcm.

25. Gọi I là trung điểm của cạnh BC : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng PQ : $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AJ}$

Theo giả thiết $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$, ta suy ra : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AJ}$ => *I trùng với J*; nói cách khác hai đoạn thẳng PQ, BC cắt nhau ở trung điểm của mỗi đoạn thẳng; điều đó chứng tỏ tứ giác BPCQ là hình bình hành, $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{BP}$ và từ đó suy ra $\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IQ}$. Khi Q vạch ra tia Cx thì tập hợp các điểm P là tia By ảnh của tia Cx trong phép đối xứng tâm, với I là tâm đối xứng.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

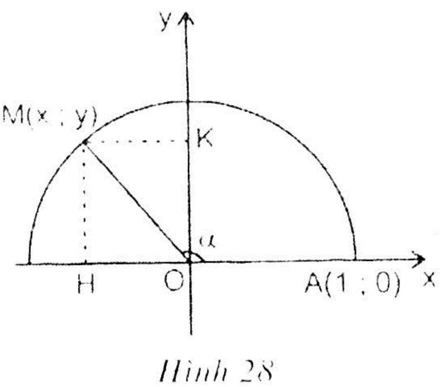
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tỉ số lượng giác của một góc bất kì (từ 0° đến 180°)

Với mỗi góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) ứng với một cung $\overset{\frown}{AM}$, điểm A(1, 0) là điểm đầu, ta luôn xác định được điểm cuối M(x; y) sao cho sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

Khi đó ta có :

- $\sin\alpha = y$ (= OK) Với $x \neq 0$ thì $\tan\alpha = \frac{y}{x}$
- $\cos\alpha = x$ (= OH) Với $y \neq 0$ thì $\cot\alpha = \frac{x}{y}$



Hình 28

2. Đối với 2 góc bù nhau (α và $180^o - \alpha$) ta có

$\sin\alpha = \sin(180^o - \alpha)$ $\qquad$ $\tan\alpha = -\tan(180^o - \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(180^o - \alpha)$ $\qquad$ $\cot\alpha = -\cot(180^o - \alpha)$

3. Tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt

Góc	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\Vert$

4. Góc của hai vectơ là góc tạo bởi hai vectơ bằng hai vectơ đã cho vẽ tại một điểm bất kì trong mặt phẳng.

Góc của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^o$ ta nói $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ và viết $\vec{a} \perp \vec{b}$

5. Tích vô hướng của hai vectơ

a) Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ và được xác định bởi công thức $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$

b) Bình phương vô hướng $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

c) Các tính chất của tích vô hướng

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và mọi số thực k, ta có :

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính giao hoán)
- $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$
- $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính phân phối).

4. Tích vô hướng và công thức chiếu

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}$ (A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên giá của $\overrightarrow{CD}$)

5. Các hằng thức về tích vô hướng

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

6. Áp dụng

- Tập hợp điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k^2$ (trong đó độ dài $AB = 2a$, k^2 không đổi, AB cố định)

– Là đường tròn tâm O (O là trung điểm của AB) và bán kính $R = \sqrt{\dfrac{k^2 - 2a^2}{2}}$ nếu $k^2 - 2a^2 > 0$

– Là điểm O, nếu $k^2 = 2a^2$

– Là tập rỗng, nếu $k^2 < 2a^2$

- Tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = k^2$ (trong đó OA cố định, $OA = a$, k^2 không đổi) là đường thẳng vuông góc với OA tại H sao cho $OH = \dfrac{k^2}{a}$.

- Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k^2$ (trong đó AB cố định, $AB = 2a$, k^2 không đổi) là đường thẳng vuông góc với OB tại H sao cho $OH = \dfrac{k^2}{4a}$ (O là trung điểm của AB).

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB và không trùng với các điểm A, B, C. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba điểm A', B', C' thẳng hàng là $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ (Định lí Menalaus).

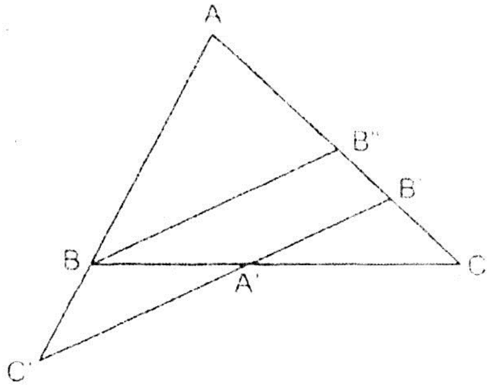
Giải. A', B', C' thẳng hàng $\Rightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Thật vậy từ B kẻ BB''// A'B' (B'' ∈ AC), ta có :

$$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{B'B''}}{\overline{B'C}},$$

$$\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$$

$$\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'B''}}$$



Hình 29

Nên $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{B'B''}}{\overline{B'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'B''}} = 1$

Ngược lại $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Rightarrow$ A', B', C' thẳng hàng.

Giả sử A'B' cắt AC tại C'' theo chứng minh trên ta có :

$$\frac{A'B'}{A'C'}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B} = 1$$

và căn cứ vào giả thiết thì ta có $\frac{C''A}{C''B} = \frac{C'A}{C'B} \Rightarrow C' \equiv C''$.

Do đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hai vectơ $\vec a$, $\vec b$ khác $\vec 0$. Chứng minh rằng :

a) $\vec a.\vec b = \frac{1}{2}[(\vec a + \vec b)^2 - |\vec a|^2 - |\vec b|^2)$; b) $\vec a.\vec b = \frac{1}{4}[(\vec a + \vec b)^2 - (\vec a - \vec b)^2]$

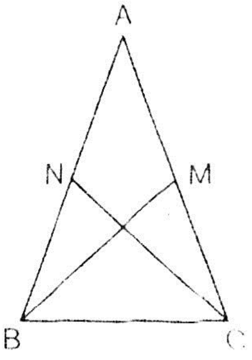
Giải. a) Ta biết $(\vec a + \vec b)^2 = \vec a^2 + \vec b^2 + 2\vec a.\vec b$

nên $\frac{1}{2}[(\vec a + \vec b)^2 - |\vec a|^2 - |\vec b|^2] = \frac{1}{2}[\vec a^2 + \vec b^2 + 2\vec a\vec b - |\vec a|^2 - |\vec b|^2] = \vec a.\vec b$

b) $\frac{1}{4}[(\vec a + \vec b)^2 - (\vec a - \vec b)^2] = \frac{1}{4}[\vec a^2 + \vec b^2 + 2\vec a.\vec b - \vec a^2 - \vec b^2 + 2\vec a.\vec b] = \vec a.\vec b$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

Giải. Giả sử ΔABC có hai trung tuyến BM = CN, ta phải chứng minh ΔABC cân.



Hình 30

Thật vậy $2\vec{CN} = (\vec{CA} + \vec{CB})$

$2\vec{BM} = (\vec{BA} + \vec{BC})$

nên $4\vec{CN}^2 = (\vec{CA} + \vec{CB})^2$

$4\vec{BM}^2 = (\vec{BA} + \vec{BC})^2$

Do đó $(\vec{CA} + \vec{CB})^2 = (\vec{BA} + \vec{BC})^2$

$\Rightarrow \vec{CA}^2 + \vec{CB}^2 + 2\vec{CA}.\vec{CB} = \vec{BA}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{BA}.\vec{BC}$

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ nên $\vec{BA}.\vec{BC} = \vec{BA}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{BA}.\vec{AC} + \vec{AB}^2$

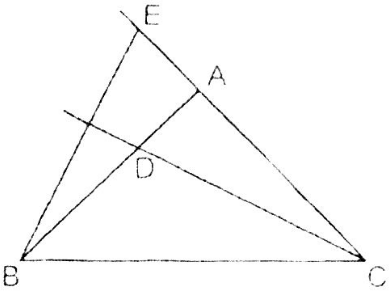
$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$ nên $\vec{CA}.\vec{CB} = \vec{CA}.(\vec{AB} - \vec{AC}) = \vec{CA}.\vec{AB} + \vec{AC}^2$

nên $\vec{CA}^2 + \vec{CB}^2 + 2\vec{CA}.\vec{CB} + 2\vec{AC}^2 = \vec{BA}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{BA}.\vec{BC} + 2\vec{AB}^2$

Do $\vec{CA}.\vec{AB} = (-\vec{AC})(-\vec{BA}) = \vec{AC}.\vec{BA}$

Ta có $3\vec{AC}^2 = 3\vec{AB}^2 \Rightarrow AC = AB$. Vậy ΔABC cân đỉnh A.

Ví dụ 4. Cho tam giác vuông cân BAC ($\hat{A} = 1v$), trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD = AE. Chứng minh rằng CD vuông góc với BE.



Hình 31

Giải. Giả sử $\dfrac{AD}{AB} = m$ thì $\dfrac{AE}{AC} = m$

$\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AE} = -m\overrightarrow{AC}$

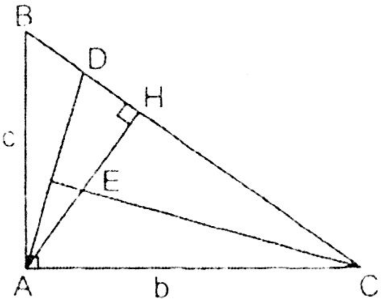
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC})$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}^2 - m\overrightarrow{AB}^2 - m^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Do $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ và $AC = AB$ nên $\overrightarrow{AC}^2 = m\overrightarrow{AB}^2$ nên $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EB} = 0 \Rightarrow DC \perp EB$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi E và D theo thứ tự là trung điểm của AH và BH. Chứng minh rằng CE và AD vuông góc với nhau.



Hình 32

Giải. Đặt $AB = c$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$AC = b$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ $= \vec{c} - \vec{b}$

$\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{b^2}{CB^2} = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}$

nên $\overrightarrow{CH} = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}(\vec{c} - \vec{b})$

$\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH})$

$$= \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \frac{b^2}{b^2 + c^2}(\vec{c} - \vec{b})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{b^2 + c^2}\vec{c} - \frac{2b^2 + c^2}{b^2 + c^2}\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \vec{b} + \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}(\vec{c} - \vec{b}) = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}\vec{c} + \dfrac{c^2}{b^2 + c^2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{b^2 + c^2}\vec{c} + \dfrac{c^2}{b^2 + c^2}\vec{b} + \vec{c}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2b^2 + c^2}{b^2 + c^2}\vec{c} + \frac{c^2}{b^2 + c^2}\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b^2(2b^2 + c^2)}{b^2 + c^2}\vec{c}^2 + \dfrac{b^2.c^2}{(b^2 + c^2)^2}\vec{c}.\vec{b}\right.$

$$\left. - \left(\frac{2b^2 + c^2}{b^2 + c^2}\right)^2 \vec{b}.\vec{c} - \frac{(2b^2 + c^2)c^2}{b^2 + c^2}.\vec{b}^2\right)$$

Do AB ⊥ AC nên $\vec{b}.\vec{c} = 0$. Vậy

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE} = \frac{b^2.c^2(2b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)^2} - \frac{b^2.c^2(2b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)^2} = 0$$

Do đó $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CE}$ hay AD ⊥ CD.

III. BÀI TẬP

1. Cho hai vectơ tùy ý $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mặt phẳng. Người ta quay hai vectơ này một góc 90^o theo cùng một chiều quay trong mặt phẳng và theo thứ tự nhận được hai vectơ $\vec{a}', \vec{b}'$. Chứng minh rằng $\vec{a}.\vec{b}' + \vec{b}.\vec{a}' = 0$.

2. Tính độ dài đường chéo AC của hình thoi ABCD biết độ dài cạnh bằng 1 và góc BAD bằng 30^o.

3. Tính góc của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết rằng $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ và vectơ $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với nhau.

4. Xác định góc của hai vectơ $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{d} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$, nếu $\vec{a} = (-1; 1)$, $\vec{b} = (1; 3)$.

5. Cho tam giác với tọa độ của các đỉnh là A(1; 1), B(−4; 3), C(2; 2). Tính độ dài đường trung tuyến AN.

6. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

7. Biết rằng $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ và $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

8. Vectơ $\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với vectơ $7\vec{a} - 5\vec{b}$, vectơ $\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với vectơ $7\vec{a} - 2\vec{b}$. Tính góc của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

9. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn điều kiện $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Tính $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$.

10. Cho A(3; 2), B(5; 1), D(1; −2). Tính độ dài đường chéo hình bình hành ABCD.

11. Cho điểm B(2; −19), C(−4; 29), M(1; −1). Tính khoảng cách từ điểm M đến trung điểm của đoạn thẳng BC và khoảng cách từ M đến điểm N trên đoạn thẳng BC với $|\overrightarrow{BN}| : |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{3}$.

12. Cho AB, BE, CF là ba trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0$.

13. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng ta luôn có $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = PI^2 - AI^2$ (P là điểm bất kì).

14. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), AH là đường cao. Từ H kẻ HD vuông góc với AC và M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.

15. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$.

b) Ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.

16. Độ dài các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$. Chứng minh rằng các trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau.

17. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

18. Gọi a, b, c là độ dài cạnh lần lượt đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC:

a) Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$

b) Chứng minh rằng điểm N nằm trên tia phân giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} - \frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) = 0$

c) Gọi A' là trung điểm của cạnh BC, chứng minh rằng A' nằm trên tia phân giác của góc A khi và chỉ khi b = c.

19. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 1, M là trung điểm cạnh AB. Trên đường chéo AC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

a) Chứng minh rằng DN vuông góc với MN.

b) Tính tổng $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB}$.

c) Cho Y bất kì trên cạnh BC, chứng minh rằng $\overrightarrow{NY}.\overrightarrow{AB}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm Y.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Gọi $\vec{a}''$ là vectơ nhận được khi quay $\vec{a}'$ một góc 180^0 (h. 33), vậy ta có

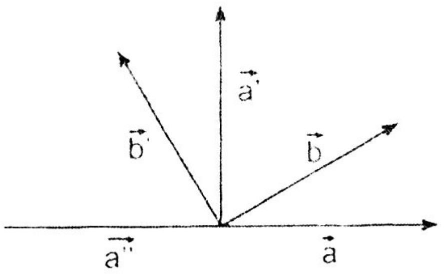
$(\vec{b}.\vec{a}') = (\vec{b}'.\vec{a}'') = 180^0 - (\vec{a}.\vec{b}')$ (1)

$\vec{a}.\vec{b}' = |\vec{a}|.|\vec{b}'|\cos(\vec{a}.\vec{b}') = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}.\vec{b}')$

$\vec{b}.\vec{a}' = |\vec{b}|.|\vec{a}'|\cos(\vec{b}.\vec{a}') = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{b}.\vec{a}')$

Từ (1) ta có $\cos(\vec{b}.\vec{a}') = -\cos(\vec{a}.\vec{b}')$.

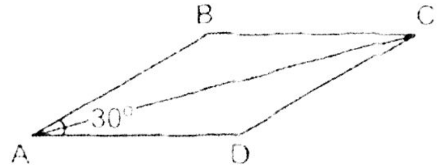
Do đó $\vec{a}.\vec{b}' + \vec{b}.\vec{a}' = 0$.



Hình 33

2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ (1)



Hình 34

Theo giả thiết $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1$ và $\widehat{BAD} = 30^{o}$ nên $\vec{AB}.\vec{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ (1) ta có $|\vec{AC}|^2 = 2 + \sqrt{3}$ nên $AC = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

3. Do $\vec{p} \perp \vec{q}$ nên $\vec{p}.\vec{q} = (\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$(\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a}.\vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$

Ta lại có $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (giả thiết) nên $6|\vec{a}|^2\cos(\vec{a},\vec{b}) - 3|\vec{a}|^2 = 0$

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{1}{2}$; do đó $(\vec{a},\vec{b}) = 60^{o}$.

4. Tọa độ của hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ là :

$\vec{c} = (-4 + 1; 4 + 3) = (-3; 7) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{58}$

$\vec{d} = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}; -\dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{4}\right) = (2; 5) \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{29}$

$$\cos(\vec{c},\vec{d}) = \frac{\vec{c}.\vec{d}}{|\vec{c}|.|\vec{d}|} = \frac{29}{\sqrt{58}.\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $(\vec{c},\vec{d}) = 45^{o}$.

5. Giả sử O là gốc tọa độ, khi đó $\vec{OB} = (-4;3)$ và $\vec{OC} = (2;2)$. Nếu N là trung điểm của B, C thì ta có : $\vec{ON} = \dfrac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$ (ví dụ 1, §1)

$\vec{ON} = \left(\dfrac{-4 + 2}{2}; \dfrac{3 + 2}{2}\right) = \left(-1; \dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow N\left(-1; \dfrac{5}{2}\right)$

$\vec{AN} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 1\right)^2} = \dfrac{5}{2}$.

6. Do $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, nên $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a \perp b$.

7. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$

Thay $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23$ nên $|\vec{a} - \vec{b}| = 30 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

8. Nếu hai vectơ vuông góc thì tích vô hướng của chúng bằng 0, nên ta có

$(\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \Rightarrow 7|\vec{a}|^2 + 16\vec{a}.\vec{b} - 15|\vec{b}|^2 = 0$ (1)

$(\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \Rightarrow 7|\vec{a}|^2 - 30\vec{a}.\vec{b} + 8|\vec{b}|^2 = 0$ (2)

Trừ vế với vế của hai đẳng thức (1) và (2) ta có:

$46\vec{a}.\vec{b} - 23|\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{|\vec{b}|^2}{2}$

Thay kết quả này vào (1) ta nhận được $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$, từ kết quả $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{|\vec{b}|^2}{2}$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 60^\circ$.

9. Từ đẳng thức $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a})$ với điều kiện $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ ta có $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -\dfrac{3}{2}$.

10. Nếu A, B, C và D là bốn đỉnh của hình bình hành ABCD thì $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ vậy $\vec{AC} = (0; 5)$ nên AC = 5.

11. Giả sử O là gốc tọa độ, điểm N nằm trên đoạn BC và $|\vec{BN}| : |\vec{BC}| = n$ thì ta có $\vec{ON} = n\vec{OC} + (1-n)\vec{OB}$. Như vậy tọa độ của điểm N có thể biểu diễn qua tọa độ của điểm $B(x_B, y_B)$ và tọa độ của điểm $C(x_C, y_C)$: $N(nx_C + (1-n)x_B; ny_C + (1-n)y_B)$. Nếu N là trung điểm của BC thì $n = \dfrac{1}{2}$, ta đã biết tọa độ của điểm B và C suy ra tọa độ của điểm N, N(−1; 5).

Vậy $|\vec{MN}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-5)^2} = 2\sqrt{10}$

Trong trường hợp $n = \dfrac{1}{3}$ thì $|\vec{MN}| = \sqrt{1^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5}$.

12. Do AD là trung tuyến của ΔABC nên $\vec{AD} = \dfrac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$. Tương tự ta có

$\vec{BE} = \dfrac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$; $\vec{CF} = \dfrac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$

Vậy $\vec{AD}.\vec{BC} + \vec{BE}.\vec{CA} + \vec{CF}.\vec{AB}$

$= \dfrac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}).\vec{BC} + \dfrac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}).\vec{CA} + \dfrac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}).\vec{AB}$

$= \dfrac{1}{2}(\underbrace{\vec{AB}.\vec{BC} + \vec{AB}.\vec{CB}}_{0} + \underbrace{\vec{AC}.\vec{BC} + \vec{BC}.\vec{CA}}_{0} + \underbrace{\vec{BA}.\vec{CA} + \vec{AB}.\vec{CA}}_{0}) = 0.$

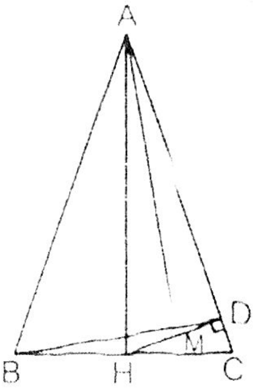
13. Do I là trung điểm của AB, nên $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PI}$

$\Rightarrow (\vec{PA} + \vec{PB})^2 = 4\vec{PI}^2 \Rightarrow PA^2 + PB^2 + 2\vec{PA}.\vec{PB} = 4PI^2$

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \frac{4PI^2 - (PA^2 + PB^2)}{2}$, mà: $PA^2 + PB^2 = 2PI^2 + \frac{AB^2}{2}$

suy ra $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \dfrac{4PI^2 - 2PI^2 - \frac{AB^2}{2}}{2}$

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = PI^2 - \frac{AB^2}{4} = PI^2 - AI^2$.



Hình 35

14. Do M là trung điểm của HD nên:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) =$

$= \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{0} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{0})$

Mà $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{HD}|\cos\widehat{AHD} = -HD^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC} = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{HC}|\cos\widehat{ACH} = AD.DC$

Trong tam giác vuông AHC, HD là đường cao thuộc cạnh huyền, nên $HD^2 = AD.DC$. Nên $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = 0$

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow AM \perp BD$.

15. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}}_{0} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{DB}.\underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})}_{0} = \overrightarrow{DB}.\vec{0} = 0$

b) Giả sử có ΔABC, hạ các đường cao AM và BN gặp nhau tại H. Ta có tứ giác HACB. Áp dụng kết quả phần (a) vào tứ giác này ta có :

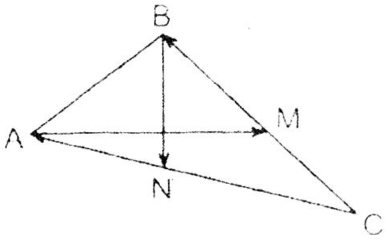
$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = 0$$

Do $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$, tương tự $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0$ suy ra $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{BA}$ hay $CH \perp BA$, vậy CH là đường cao của ΔABC hay ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.

16. Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{BN} = \vec{n}, \overrightarrow{AM} = \vec{m}$, ta có :

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, tương tự ta có : $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ hay



Hình 36

$\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\vec{m}.\vec{n} = \frac{5}{4}\vec{a}.\vec{b} - \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)^2$ (1).

Nếu $\vec{AB} = \vec{c}$ thì $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, kết hợp với (1) ta có: $\vec{m}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{m} \perp \vec{n}$ hay $AM \perp BN$.

17. Ta có: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 + 2\vec{GA}.\vec{GB} + 2\vec{GA}.\vec{GC} + 2\vec{GB}.\vec{GC} = 0$

Ta lại có :

$\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{BA} = \vec{c} \Rightarrow \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 2\vec{GA}.\vec{GB} = \vec{c}^2$

$\vec{GC} - \vec{GA} = \vec{AC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{GC}^2 + \vec{GA}^2 - 2\vec{GC}.\vec{GA} = \vec{b}^2$

$\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{CB} = \vec{a} \Rightarrow \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 - 2\vec{GB}.\vec{GC} = \vec{a}^2$

$2(\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2) - 2(\vec{GA}.\vec{GB} + \vec{GC}.\vec{GA} + \vec{GB}.\vec{GC})$

$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2$

Kết hợp với (1) ta có $3(\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2$

nên $\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2}{3}$.

18. a) Ta có: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CA}^2 + 2\vec{AB}.\vec{BC} + 2\vec{AB}.\vec{CA} + 2\vec{BC}.\vec{CA} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2c.a\cos B + 2c.b\cos A + 2a.b\cos C$

chia cả hai vế cho 2abc được điều phải chứng minh.

b) Giả sử Ax là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, M ∈ Ax nên $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$ mà

$\cos\widehat{BAM} = \frac{\vec{AB}.\vec{AM}}{|\vec{AB}|.|\vec{AM}|}$; $\cos\widehat{CAM} = \frac{\vec{AC}.\vec{AM}}{|\vec{AC}|.|\vec{AM}|}$

suy ra $\frac{\vec{AB}.\vec{AM}}{|\vec{AB}|.|\vec{AM}|} - \frac{\vec{AC}.\vec{AM}}{|\vec{AB}|.|\vec{AM}|} \Leftrightarrow \frac{\vec{AB}.\vec{AM}}{|\vec{AB}|} - \frac{\vec{AC}.\vec{AM}}{|\vec{AC}|} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM}\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} - \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}\left(\frac{\vec{AB}}{c} - \frac{\vec{AC}}{b}\right) = 0$

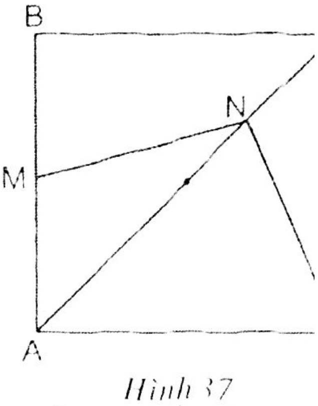
c) Do A' là trung điểm của cạnh BC nên $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

Nếu $A' \in Ax \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} - \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} - \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{c} - \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2}{b} = 0 \Leftrightarrow c + b\cos A - c\cos A - b = 0$

$\Leftrightarrow (c - b)(1 - \cos A) = 0$ vì $A \neq 0 \Rightarrow 1 - \cos A \neq 0$

$\Leftrightarrow c - b = 0 \Leftrightarrow c = b$. Vậy $A' \in Ax \Leftrightarrow c = b$.



Hình 37

19. a) $\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{9}{16}\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{16}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0}(\text{do } AB \perp AD)$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DN} = -\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DN}$$

b) $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC})^2 = \overrightarrow{DC}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DN}^2 + 2\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}^2 = \overrightarrow{DC}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{DC}^2 - (\overrightarrow{DN}^2 + \overrightarrow{NC}^2) = 1 - (\overrightarrow{DN}^2 + \overrightarrow{NC}^2)$

$$\overrightarrow{DN}^2 = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{3}{8}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} = \frac{5}{8}$$

$$\overrightarrow{NC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC}^2 = \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0}) = \frac{1}{8}$$

Do đó: $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} = 1 - \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{4}$; $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{MN}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{C}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB} = \frac{(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB})^2 - \overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{CB}^2}{2}$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB})^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{2}{8}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{5}{8}$$

$\overrightarrow{CB}^2 = 1$. Do đó ta có : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{\frac{2}{8} - \frac{5}{8} - 1}{2} = -\dfrac{11}{16}$

Vậy $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{11}{16} = -\dfrac{7}{16}$

c) $Y \in BC$ nên $\overrightarrow{CY} = n\overrightarrow{CB} = -n\overrightarrow{AD} (\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA})$

$$\overrightarrow{NY} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CY} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - n\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{4} - n\right)\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{NY}.\overrightarrow{AB} = \left[\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{4} - n\right)\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{1}{4} - n\right)\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}$$

Như vậy $\overrightarrow{NY}.\overrightarrow{AB}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của điểm Y.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. BÀI TẬP

1. a) Cho điểm C thuộc đoạn AB sao cho $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{p}{q}$. Chứng minh rằng :

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \dfrac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$ (O là điểm bất kì).

b) Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ ta cũng có thể viết $\overrightarrow{OC} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$ ($k \in R$, k xác định, O là điểm bất kì).

2. Trên mặt phẳng cho n giác đều $A_1A_2...A_n$.

a) Chứng minh rằng nếu n là số chẵn thì đối với một điểm M tùy ý của mặt phẳng trong biểu thức $\pm\overrightarrow{MA_1} \pm \overrightarrow{MA_2} \pm ... \pm \overrightarrow{MA_n}$ có thể chọn các dấu cộng và trừ sao cho tổng nhận được bằng $\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu n lẻ thì biểu thức trên với cách chọn các dấu cộng và trừ cũng có thể bằng $\vec{0}$ nhưng đối với một số hữu hạn điểm M trong mặt phẳng. (Đề thi vô địch Liên Xô cũ năm 1986).

3. Trên phần kéo dài các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lồi ABCD lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng diện tích tứ giác A'B'C'D' gấp 5 lần diện tích tứ giác ABCD. (Vô địch Liên Xô năm 1962).

4. Trên mặt phẳng cho trước các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, tổng của chúng bằng $\vec{0}$. Chứng minh bất đẳng thức

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| > |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|.$$

5. Chứng minh rằng nếu các tứ giác ACPH, AMBE, AHBT, BKXM, CKXP là hình bình hành thì tứ giác ABTE là hình bình hành (đỉnh của tất cả các tứ giác, được ghi tên theo ngược chiều kim đồng hồ).

6. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và hai điểm C, D bất kì nằm trên nửa đường tròn đó, AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh

a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = 4R^2$.

7. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $4\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$ là một hằng số.

8. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a) $\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C} < \frac{3}{2}$; b) $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} > -\frac{3}{2}$.

9. Cho tam giác ABC

a) Tìm tập hợp những điểm M sao cho : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0$

b) Tìm tập hợp những điểm M sao cho : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0$

c) Tìm tập hợp những điểm M sao cho : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$

d) Tìm tập hợp những điểm M sao cho :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0.$$

10. Cho tam giác cân ABC (BA = BC), hai điểm D, E theo thứ tự nằm trên BA, BC sao cho $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$. Tính các góc của ΔABC nếu $AE \perp CD$.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{CA}{CB + CA} = \frac{p}{p + q}$ hay $\frac{AC}{AC + CB} = \frac{p}{p + q}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{p}{p+q}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$$

b) Do A, B, C thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cộng tuyến nên ta có thể tìm được số k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB} + (1 - k)\overrightarrow{OA} \text{ (đpcm)(*)}$$

Ta có hệ thức A, B, C thẳng hàng <> $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB}$.

Ta còn có : A, B, C thẳng hàng <> $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ với m, n $\in \mathbb{R}$ và
$m + n = 1$ (O bất kì)
Ta có thể sử dụng kết quả này để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

2. a) Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác. Khi đó $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$ và trong tổng chỉ cần lấy dấu "+" của các số có dấu hiệu chẵn và lấy dấu "–" của các số hạng còn lại.

b) Giả sử MA_{i_1}, MA_{i_2}, ..., MA_{ik} tham gia vào tổng với dấu "+" và MA_{j_1}, MA_{j_2}, ..., $MA_{k_{n-k}}$ tham gia vào tổng với dấu "–", vậy

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n - 2k}(\overrightarrow{OA_{i2}} + ... + \overrightarrow{OA_{ik}} - \overrightarrow{OA_{j1}} - \overrightarrow{OA_{j2}} - ... - \overrightarrow{OA_{jn-k}})$$

Trong đó M được xác định một cách đơn trị trong trường hợp này.

3. Đường trung tuyến chia diện tích tam giác làm 2 phần như nhau (h. 38). Vì vậy

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CBB'} = S_{\Delta CB'C''}$

Từ đó suy ra rằng $S_{\Delta BB'C''} = 2S_{\Delta ABC}$
Cũng như vậy chứng minh được .

$S_{\Delta CC'D'} = 2\ S_{\Delta BCD}$

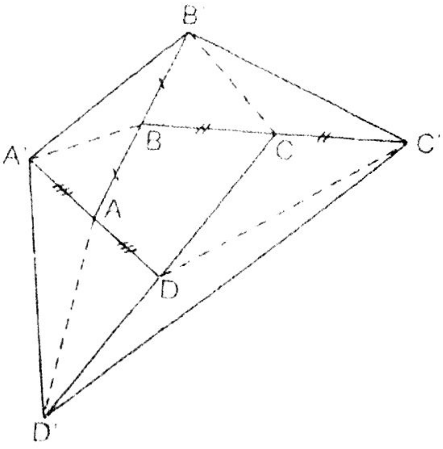
$S_{\Delta DD'A} = 2\ S_{\Delta CDA'}$

$S_{\Delta AA'B'} = 2\ S_{\Delta DAB}$
Cộng 4 đẳng thức, ta có

$S_{\Delta BB'C''} + S_{\Delta CC'D'} + S_{\Delta DD'A} + S_{\Delta AA'B'} =$

$= 2(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD} + S_{\Delta CDA'} + S_{\Delta DAB}) = 4S$

Vì thế $S_{A'B'C'D'} = 4S + S = 5S.$



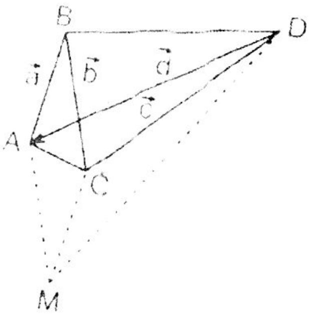
Hình 38

4. Vế phải của bất đẳng thức, cũng như vế trái, đối xứng với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (với điều kiện tổng của chúng bằng $\vec{0}$); vì $\vec{b} + \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$ v.v.,..., và nó bằng nửa tổng của tất cả các tổng từng cặp hai vectơ cho trước. Nếu xét cả điều đó, với một bộ bốn vectơ cho trước có tổng bằng $\vec{0}$, ta có thể chọn các kí hiệu sao cho đường gấp khúc được thành lập từ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ sẽ là đường gấp khúc tự cắt. Để được điều đó, chỉ cần đặt các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chung gốc O, và chúng cùng nằm trong nửa mặt phẳng, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{c}$ nằm cùng phía so với đường thẳng qua O và song song với $\vec{b}$. Khi đó

$$|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}| = BD + AC < |\vec{b}|+|\vec{d}|$$

Chỉ cần thêm vào đó $|\vec{b}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{c}| < |\vec{a}|+|\vec{c}|$

Một lời giải khác dựa trên ý đồ trung bình hóa các hình chiếu của các vectơ theo tất cả các hướng có thể. Lời giải này cho phép đưa các phương án hai chiều, thậm chí ba chiều về cách chứng minh bất đẳng thức tương tự đối với các số (có nghĩa là đưa về phương án một chiều).



Hình 39

5. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MB}$ (do AMBE là hình bình hành)

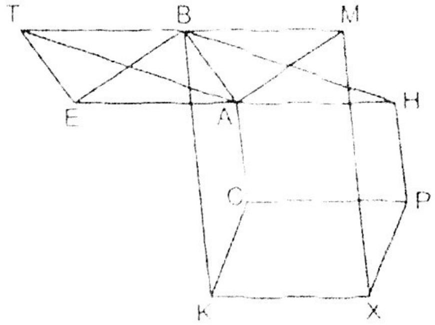
$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{XK}$ (do BKXM là hình bình hành)

$\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{PC}$ (do XKCP là hình bình hành)

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{HA}$ (do ACPH là hình bình hành)

$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BT}$ (do AHBT là hình bình hành)

Do đó $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BT} \Leftrightarrow$ ABTE là hình bình hành.



Hình 40

6. a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = AC.AI$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AC.AI$ (vì C là hình chiếu vuông góc của B trên AI).

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$

b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI}$

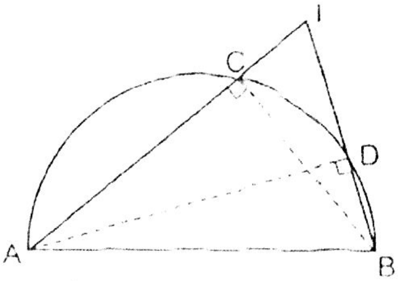
mà $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BI}$ (D là hình chiếu vuông góc của A trên BI)

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = BD.BI$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = 0$

Do đó : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BI} = 4R^2$



Hình 41

7. Do M là trung điểm của cạnh BC nên

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

và $$\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

Vậy $$4\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}).\left(-\frac{1}{2}\right)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}$$

Do H là trực tâm của ΔABC nên $\vec{HC}.\vec{AB} = 0, \vec{HB}.\vec{AC} = 0$, vậy

$$4\vec{MH}.\vec{MA} = \vec{HB}.\vec{AB} + \vec{HC}.\vec{AC} = \vec{AB}.(\vec{HC} + \vec{CB}) + \vec{AC}.(\vec{HB} + \vec{BC})$$

$$= \underbrace{\vec{AB}.\vec{HC}}_{0} + \vec{AB}.\vec{CB} + \underbrace{\vec{AC}.\vec{HB}}_{0} + \vec{AC}.\vec{BC} = \vec{AB}.\vec{CB} + \vec{AC}.\vec{BC}$$

$$= \vec{BC}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{BC}.\vec{BC} = \vec{BC}^2 = BC^2 \text{ (không đổi).}$$

8. a) Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ theo thứ tự là vectơ đơn vị của vectơ $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$. Vậy:

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{BC}}{BC} + \frac{\vec{CA}}{CA} \left(\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{AB} \Rightarrow |\vec{i}| = \frac{|\vec{AB}|}{AB} = \frac{|AB|}{|AB|} = 1 \right)$$

nếu ΔABC là tam giác đều thì $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}}{AB} = \vec{0}$,

nếu ΔABC không phải là tam giác đều thì $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}$

Tóm lại trong mọi trường hợp $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) > \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{i}^2 + \vec{j}^2 + \vec{k}^2 + 2\vec{i}.\vec{j} + 2\vec{i}.\vec{k} + 2\vec{j}.\vec{k} \geq 0$ (1)

Rõ ràng $(\vec{i}, \vec{j}) = 180^\circ - \hat{B}, (\vec{i}, \vec{k}) = 180^\circ - \hat{A}, (\vec{j}, \vec{k}) = 180^\circ - \hat{C}$.

Từ (1) ta có $1 + 1 + 1 + 2\cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2\cos(\vec{i}, \vec{k}) + 2\cos(\vec{j}, \vec{k}) > 0$

hay $3 - 2(\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}) > 0$, suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi H và O theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Ta có :

$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Rightarrow (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 > 0$

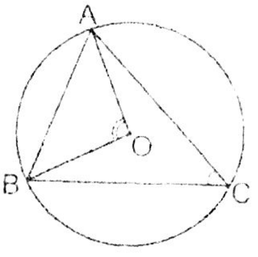
$\Rightarrow \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 + 2\vec{OA}.\vec{OB} + 2\vec{OB}.\vec{OC} + 2\vec{OA}.\vec{OC} \geq 0$ (1)

Ta đã biết $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2\hat{C} \Rightarrow \vec{OA}.\vec{OB} = R^2\cos 2\hat{C}$

$(\vec{OA}, \vec{OC}) = 2\hat{B} \Rightarrow \vec{OA}.\vec{OC} = R^2\cos 2\hat{B}$

$(\vec{OB}, \vec{OC}) = 2\hat{A} \Rightarrow \vec{OB}.\vec{OC} = R^2\cos 2\hat{A}$



Hình 42

Từ (1) suy ra $3R^2 + 2R^2(\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C}) > 0$

$\Rightarrow \cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} > -\frac{3}{2}$.

9. a) $\vec{AB}.\vec{AM} - \vec{AC}.\vec{AM} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}(\vec{AB} - \vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{CB} = 0 \Leftrightarrow AM \perp CB \Leftrightarrow \{M\} \in \Delta$

(Δ đi qua A và vuông góc với BC).

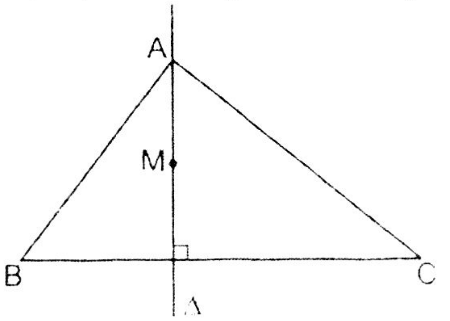
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = 0$ (I là trung điểm của BC)

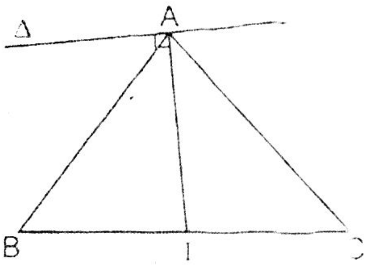
$\Leftrightarrow AM \perp AI \Leftrightarrow \{M\} = \Delta : \Delta \perp AI \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MJ$

(I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, AC)

$\Leftrightarrow \{M\}$ là đường tròn đường kính IJ.

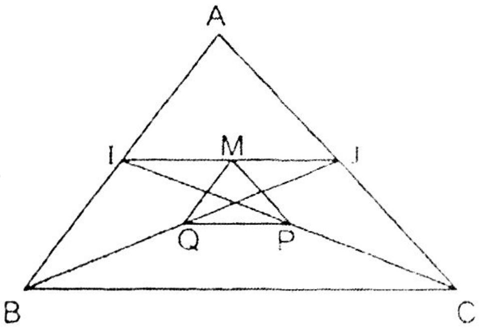


Hình 43

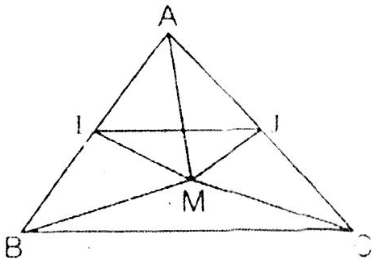


Hình 44

d) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.



Hình 45



Hình 46

10. Đặt $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} = k$

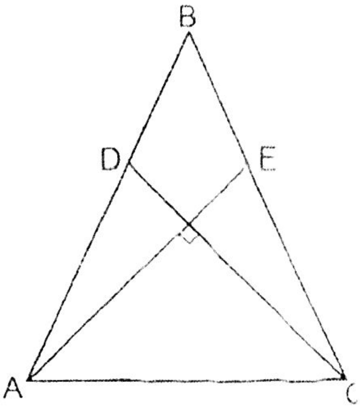
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$

Do BA = BC nên $|\vec{a}| = |\vec{b}| = m$

$\frac{BD}{DA} = k \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{k}{k+1}$

$\overrightarrow{BD} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BA} = -\frac{k}{k+1}\vec{a}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \frac{k}{k+1}\vec{a} - \vec{b}$



Hình 47

Cũng chứng minh tương tự như trên $\overrightarrow{EA} = \frac{k}{k+1}\vec{b} - \vec{a}$

Do $DC \perp EA \Rightarrow \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{EA} = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{k+1}\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\frac{k}{k+1}\vec{b} - \vec{c}\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^2}{(k+1)^2}+1\right)\vec{a}.\vec{b} - \frac{k}{k+1}(\vec{a}^2+\vec{b}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^2}{(k+1)^2}+1\right)\vec{a}.\vec{b} = \frac{k}{k+1}2\vec{a}^2$$

$$\left(\frac{k^2}{(k+1)^2}+1\right)|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\hat{B} = \frac{2k.m^2}{k+1}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{2k.m^2}{k+1} : \left(\frac{k^2}{(k+1)^2}+1\right)m^2$$

$$\cos\hat{B} = \frac{2k}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2}{(2k^2+2k+1)} = \frac{2k(k+1)}{(2k^2+2k+1)}$$

Vì $k > 0$ nên $0 < \frac{2k(k+1)}{(2k^2+2k+1)} < 1$; $\hat{B} = \arccos\frac{2k(k+1)}{(2k^2+2k+1)}$

CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

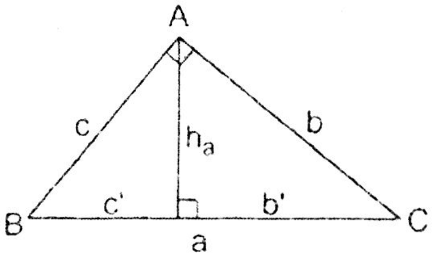
A. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

1. $h^2 = b'c'$
2. $b^2 = ab'$

   $c^2 = ac'$
3. $a^2 = b^2 + c^2$
4. $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$
5. $a = a\sin B = a\cos C$

   $c = a\sin C = a\cos B$
6. $b = c\tan B = c\cot anC$

   $c = b\tan C = c\cot anB$



Hình 48

B. Hệ thức lượng trong tam giác thường

1. Ký hiệu

A, B C là 3 góc

a, b, c là 3 cạnh

S là diện tích

2p là chu vi

m_a m_b m_c là 3 trung tuyến

h_a h_b h_c là 3 đường cao

l_a l_b l_c là 3 đường phân giác

H là trực tâm, G là trọng tâm

O là tâm đường tròn ngoại tiếp

I là tâm đường tròn nội tiếp

J_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A

2. Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$a = 2R\sin A;\ \sin A = \frac{a}{2R} \ldots$$

3. Định lý hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4. Định lý về đường trung tuyến:

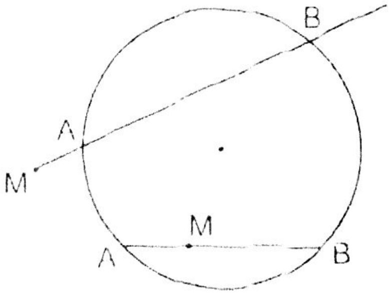
$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

5. Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr$$

$$= (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

C. Hệ thức lượng trong đường tròn



Hình 49

1. $\wp_{M/(O,R)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2$

2. $\wp_{M/(O)} > 0 \Leftrightarrow$ M ở ngoài đường tròn

$\wp_{M/(O)} < 0 \Leftrightarrow$ M ở trong đường tròn

$\wp_{M/(O)} = 0 \Leftrightarrow$ M ở trên đường tròn

3. Nếu M ở ngoài đường tròn thì

$\wp_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MT^2$ (MT là tiếp tuyến)

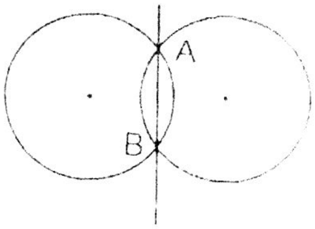
4. * Trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) là đường thẳng $\perp O_1O_2$ tại H, thỏa mãn $2\overline{O_1O_2}.\overline{IH} = R_2^2 - R_1^2$. Và I là trung điểm O_1O_2.

* Trục đẳng phương là quỹ tích những điểm có cùng phương tích với 2 đường tròn.

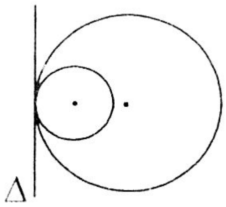
* Trục đẳng phương của 2 đường tròn cắt nhau là cát tuyến chung của 2 đường tròn đó.

Hai đường tròn tiếp xúc nhau, trục đẳng phương là tiếp tuyến chung tại tiếp điểm

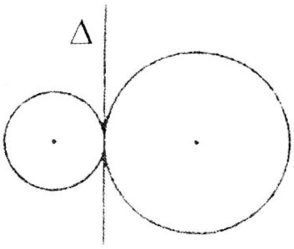
Trục đẳng phương AB của đường tròn cắt nhau



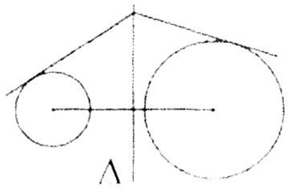
Trục đẳng phương Δ của đường tròn tiếp xúc trong



Trục đẳng phương Δ của đường tròn tiếp xúc ngoài



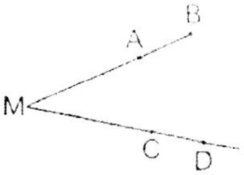
Trục đẳng phương Δ của đường tròn không giao nhau



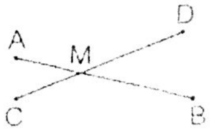
Hình 50

5. Định lý về tiếp tuyến và tứ giác nội tiếp

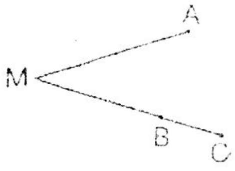
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} \Rightarrow$ ABCD nội tiếp



$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} \Rightarrow$ ADBC nội tiếp



$MA^2 = MB.MC \Rightarrow$ đường tròn (ABC) ròn tiếp xúc với MA tại A.



Hình 51

II. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC có: $\cot A = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$ (Định lý hàm số cotang)

2. Chứng minh trong tam giác ABC có:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$ (Định lý hàm số tang)

3. Chứng minh trong tam giác ABC có: a) $\sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$ viết 2 đẳng thức tương tự

b) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$ Viết hai đẳng thức tương tự

c) $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$ Viết hai đẳng thức tương tự

d) $(b - c)\cot\frac{A}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} + (a - b)\cot\frac{C}{2} = 0$

4. a) Không dùng bảng tính giá trị lượng giác của góc 15^0, suy ra giá trị lượng giác góc 75^0, góc 165^0.

b) Không dùng bảng tính giá trị lượng giác của góc 18^0, suy ra giá trị lượng giác góc 72^0, góc 162^0.

c) Bằng hình học chứng minh: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

d) Bằng hình học chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

5. a) Chứng minh rằng trong ΔABC ta luôn có: $A > 90^0 \Leftrightarrow a > 2m_a$;

$A = 90^0 \Leftrightarrow a = 2m_a$; $A < 90^0 \Leftrightarrow a < 2m_a$;

b) $m_a m_b m_c > pS$;

c) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} > 2\sqrt{3}$; d) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

6. Trong tam giác ABC. Chứng minh:

a) Nếu $BM \perp CN$ (BM và CN là 2 trung tuyến) $\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

b) Nếu $5a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C)$

c) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

d) $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

e) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

7. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $l_a^2 = \dfrac{4bc}{b+c}p(p-a) = \dfrac{bc}{b+c}(a+b+c)(b+c-a)$

b) $b + c > \frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a$

c) $l_a + l_b + l_c < \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$

8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MI}\ \forall M$

c) $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2\ \forall M$

d) $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

9. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta đều có : a) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

b) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$; c) $S^2 = rr_ar_br_c$

d) $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$; e) $r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c$

10. a) $r_a + r_b + r_c > 4R + r$; b) $\frac{h_a}{l_a} > \sqrt{\frac{2r}{R}}$; c) $\frac{m_a}{l_a} \geq \frac{b + c}{2\sqrt{bc}}$;

d) $m_am_bm_c > l_al_bl_c$; e) $\frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

11. $a^2 + b^2 + c^2 > 4\sqrt{3}S + (b + c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$

12. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$

b) $2abc(\cos A + \cos B) = (a + b)(c + b - a)(c + a - b)$

c) $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c)$

13. Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \\ a = 2b\cos C \end{cases}$

14. Chứng minh rằng ΔABC vuông khi và chỉ khi nó thoả một trong các điều kiện sau :

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$; b) $3\sin A + 4\cos A = 3$

c) $S = p(p - a) = (p - b)(p - c)$

15. Chứng minh rằng ΔABC ta luôn có: a) $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$

b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < \frac{1}{4r^2}$; c) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{2Rr}$

16. a) Cho $a = x^2 + x + 1$; $b = 2x + 1$; $c = x^2 - 1$. Tìm x để a, b, c là 3 cạnh của Δ và chứng minh nó có 1 góc là 120^0.

b) Cho $a^2 = x^2 + xy + y^2$; $b^2 = y^2 + yz + z^2$; $c^2 = z^2 + zx + x^2$. Tìm xy + yz + zx theo a, b, c biết a, b, c, x, y, z là các số dương:

c) Cho a, b, c > 0 chứng minh:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

d) ΔABC nhọn, chứng minh có tam giác có 3 cạnh là asinA; bsinB; csinC.

17. a) ΔABC có $a^2 + b^2 = 2c^2$ hãy chứng minh rằng $m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$

b) Nếu b + c = 2a thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

c) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A$ và $h_b h_c = h_a^2$

18. a) ΔABC có 2 trung tuyến. BM và CN tạo với nhau góc 120^0; BM = 6, CN = 9. Tính a, b, c?

b) Cho $a = \sqrt{6}$; $b = 2$; $c = 1 + \sqrt{3}$ Tính A, B, C, R và m_a

c) Tính a nếu c = 3; b = 4 và $S = 3\sqrt{3}$

19. Giải tam giác biết a) a = 137.5; $\hat{A} = 83^0$ $\hat{B} = 57^0$

b) a = 32; b = 45; $\hat{C} = 87^0$; c) a = 6 ; b = 7,3 c = 4,8

20. Cho ΔABC tìm $\wp_{A/(GBC)}$ và chứng minh rằng

$$\wp_{A/(GBC)} + \wp_{B/(GAC)} + \wp_{C/(GAB)} = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

21. Cho ΔABC tìm $\wp_{G/(ABC)}$, $\wp_{H/(ABC)}$, $\wp_{I/(ABC)}$

22. Cho nửa đường tròn đường kính AB với 2 dây AM và BN cắt nhau tại I. Tính $\wp_{A/(IBM)} + \wp_{B/(IBN)}$

23. Cho đoạn AB có trung điểm I và $\wp_{A/(O)} = A$ $\wp_{B/(O)} = B$; $\wp_{I/(O)} = J$

Chứng minh $AB^2 = 2(A + B - 2J)$

24. Tính phương tích của chân các đường phân giác trong của ΔABC đối với đường tròn (ABC).

25. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AE = 3a, EB = 3a; EC = a. Tiếp tuyến từ A với đường tròn (ABC) cắt BC tại K. Tính $\wp_{H/(O)}$, $\wp_{G/(O)}$, $\wp_{K/(O)}$.

26. Cho 2 đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ có trục đẳng phương là đường thẳng Δ. Từ M bất kỳ vẽ MK ⊥ Δ và ME ⊥ O_1O_2. Chứng minh

$$\wp_{M/(O_1)} - \wp_{M/(O_2)} = 2\overline{O_1O_2}.\overline{KM}.$$

27. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC và Q là tâm đường tròn bàng tiếp của góc A. Hãy chứng minh: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ và $OQ^2 = R^2 + 2Rr_a$.

28. Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt AB tại E, AC tại F và cắt đường tròn (ABC) ở M. Chứng minh: AM, EF, BC đồng quy.

29. Ở bài toán 28 nếu cho A và H cố định, BC thay đổi trên đường thẳng cố định sao cho $AB \perp AC$.

a) Chứng minh: BCFE là tứ giác nội tiếp

b) Đường tròn BCFE luôn đi qua 2 điểm cố định.

30. Cho tứ giác ABCD có AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau ở F. Gọi trung điểm AC là M, BD là N, EF là K. Chứng minh M, N, K thẳng hàng.

31. Cho ΔABC có 2 đường trung tuyến là BM và CN. Gọi C_M và C_N là đường tròn có đường kính là BM và CN. Chứng minh trục đẳng phương của 2 đường tròn C_M và C_N là đường cao AH.

32. Cho tứ diện phân biệt A, B, C, D theo thứ tự ấy cố định trên đường thẳng Δ. Hai đường tròn thay đổi đi qua A, B và C, D cắt nhau ở M và N. Chứng minh:

a) MN luôn đi qua 1 điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến vẽ từ M, N tới 2 đường tròn trên có diện cùng thuộc 1 đường tròn cố định.

33. Cho 2 đường tròn đồng tâm (O, R) và (O, r) $R > r$. P là điểm cố định $\in$ (O; r). Đường thẳng BD cắt đường tròn lớn ở C. Đường thẳng vuông góc với BP tại P cắt (O; r) tại A.

a) Chứng minh $AB^2 + BC^2 + CA^2$ không đổi khi B di động trên đường tròn.

b) Chứng minh trọng tâm ΔABC cố định khi B di động trên (O, R).

34. Cho (O; R) và 1 điểm A ở ngoài đường tròn BC là một đường kính thay đổi của O.

a) Chứng minh đường tròn (ABC) luôn đi qua 1 điểm cố định khác A

b) AB và AC cắt (O; R) tại D và E. K là giao điểm của AI và DE. Chứng minh K là điểm cố định khi BC thay đổi.

c) Tìm tập hợp điểm N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

35. Cho 2 đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ AE là tiếp tuyến chung ngoài BF là tiếp tuyến chung trong và A, B $\in$ $(O_1; R_1)$ E và F $\in$ $(O_2; R_2)$.

a) Chứng minh $AB \perp EF$. Gọi I là giao của AB và EF.

b) Chứng minh I, O_1, O_2 thẳng hàng.

III. HƯỚNG DẪN

1. Định lý hàm số cotang: Từ định lý hàm số sin $\Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$

Từ định lý hàm số cosin => $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Suy ra $\cot A = \cos A.\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \dfrac{2R}{a} =$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

Tương tự ta có $\cot B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}$; $\cot C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

2. Định lý hàm số tang:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}$$

3. a) $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \dfrac{b}{2R}.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \dfrac{c}{2R}.\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{a}{2R} = \sin A$$

Hai đẳng thức tương tự $\sin B = \sin A\cos C + \cos A\sin C$

$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

b) $VP = a\left(c\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - b\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) =$

$$= \frac{1}{2bc}(c^2a^2 + c^2b^2 - c^4 - b^2a^2 - b^2c^2 + b^4)$$

$$= \frac{b^4 - c^4 + a^2(c^2-b^2)}{2bc} = \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = (b^2-c^2)\cos A$$

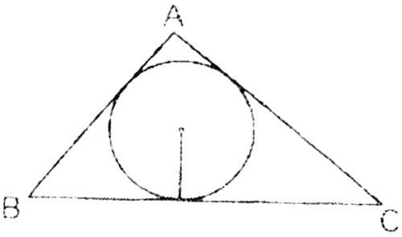
Hai đẳng thức tương tự $(c^2 - a^2)\cos B = b(a\cos A - c\cos C)$

$(a^2 - b^2)\cos C = c(b\cos B - a\cos A)$

c) Chứng minh: $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$. Thay $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ vào vế phải sẽ chứng minh được định thức trên.

d) Chứng minh: $(b - c)\cot\frac{A}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} + (a - b)\cot\frac{C}{2} = 0$



Hình 52

$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$

$b = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \Rightarrow$

$c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$

$(b - c)\cot\frac{A}{2} = r\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2}\right)$

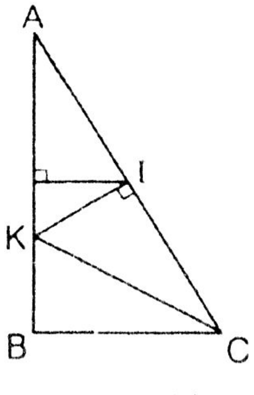
$\Rightarrow (c - a)\cot\frac{B}{2} = r\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{C}{2}\cot\frac{B}{2}\right)$

$(a - b)\cot\frac{c}{2} = r\left(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$

$\Rightarrow (b - c)\cot\frac{A}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} + (a - b)\cot\frac{C}{2} = 0$

4. a) Xét ΔABC có $B = 90^o$, $A = 15^o$ I là trung điểm AC, $IK \perp BC$

Gọi $BC = a$ thì $KA = KC = 2a$, $BK = a\sqrt{3}$, $BC = 2a + a\sqrt{3}$



Hình 53

Ta có $\sin 15^o = \frac{KI}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{2a\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

* $\cos 15^o = \frac{AB}{AC} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2a\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

* $\tan 15^o = \frac{\sin 15^o}{\cos 15^o} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Biết giá trị lượng giác của góc $15^o \Rightarrow \sin 165^o = \sin 15^o = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^o$

$\Rightarrow \cos 165^o = -\cos 15^o = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = -\sin 75^o$

$\Rightarrow \tan 165^o = -\tan 15^o = \sqrt{3} - \sqrt{2} = -\cot 75^o$

b) Xét ΔOAB cân đỉnh O có

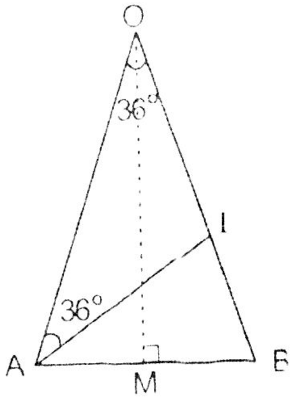
$\widehat{AOB} = 36^o$. Kẻ phân giác AI

ΔAIO cân đỉnh I ⇒ AI = OI

Δ AIB cân đỉnh A ⇒ AI = AB

Kẻ OM ⊥ AB ⇒ $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 18^o$.

$$\Rightarrow \sin 18^o = \frac{MB}{OB}$$



Hình 54

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{OI}{IB} = \frac{AO}{AB}$.

Đặt MB = x ⇒ AB = 2x. Ta có $\frac{2x}{OB - 2x} = \frac{OB}{2x} \Leftrightarrow 4x^2 = OB^2 - 2xOB$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2.OB.x - OB^2 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai với x > 0

$$\Rightarrow x = OB\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \sin 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

- $\cos 15^o = \frac{OM}{OB}$ mà $OM^2 = OB^2 - MB^2$

$$= OB^2 - OB^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = OB^2\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$\Rightarrow OM = OB\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \Rightarrow \cos 18^o = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

- $\tan 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^3 10}}{20}$

c) Chứng minh $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O; R) có $\hat{A} = \alpha$. Theo định lý hàm số sin và ΔABC ⇒ $BC = 2R\sin\alpha$.

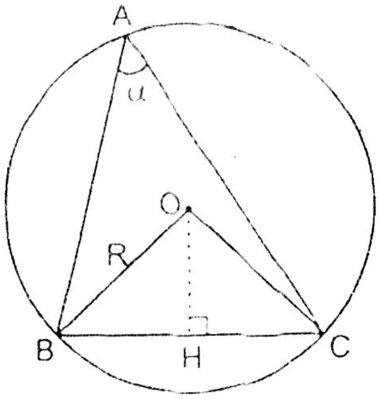
Xét ΔBOC theo định lý hàm số sin

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{OC}{\sin B} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

vì $\widehat{OBC}$ phụ với α

$\Rightarrow R\sin 2\alpha = BC\cos\alpha = (2R\sin\alpha)\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$



Hình 55

5. Chứng minh trong ΔABC ta luôn có:

a) $A > 90^o$ thì $a > 2m_a$; $A = 90^o$ thì $a = 2m_a$; $A < 90^o$ thì $a < 2m_a$

Từ định lý về đường trung tuyến

$\Rightarrow 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) + a^2 = 4bc\cos A + a^2$

$A > 90^0 \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 < a^2 \Leftrightarrow a > 2m_a$

$A = 90^0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 2m_a$

$A < 90^0 \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 > a^2 \Leftrightarrow a < 2m_a$

b) Chứng minh $m_am_bm_c \geq pS$ (với p là nửa chu vi, S là diện tích Δ)

Theo trên $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \geq (b + c)^2 - a^2$

$$= (b + c + a)(b + c - a) = 2p(2p - 2a) = 4p(p - a)$$

$$\text{vậy}\ \left.\begin{array}{l} m_a^2 \geq p(p-a) \\ m_b^2 \geq p(p-b) \\ m_c^2 \geq p(p-c) \end{array}\right| \Rightarrow m_a^2m_b^2m_c^2 \geq p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow m_a^2m_b^2m_c^2 \geq p^2S^2.$$

Vậy $m_am_bm_c \geq pS$

Có đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

c) Chứng minh: $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$

Từ $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2$

$\Rightarrow 4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

Theo Côsi $4m_a^2 + 3a^2 \geq 4(am_a\sqrt{3}) \Rightarrow am_a \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{am_a} \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \dfrac{a}{m_a} \geq \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$

Tương tự $\dfrac{b}{m_b} \geq \dfrac{2\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\dfrac{c}{m_c} \geq \dfrac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$

Vậy $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}\,\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{3}$

Có đẳng thức: $\begin{cases} 4m_a^2 = 3a^2 \\ 4m_b^2 = 3b^2 \\ 4m_c^2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ a^2 + c^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

d) Chứng minh: $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Theo chứng minh trên

$$\frac{1}{am_a} \geq \frac{2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{m_a^2}{am_a} \geq \frac{2\sqrt{3}m_a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{m_a}{a} \geq \frac{2\sqrt{3}m_a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự $\frac{m_b}{b} \geq \frac{2\sqrt{3}m_b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\frac{m_c}{c} \geq \frac{2\sqrt{3}m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

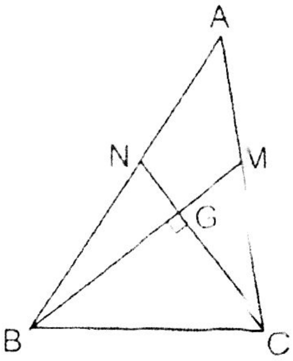
$$\Rightarrow \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{2\sqrt{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{a^2 + b^2 + c^2},$$

Mà $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

6. a) $BM \perp CN \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

$\Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C)$



Hình 56

- $BM \perp CN \Leftrightarrow BG^2 + CG^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 4m_b^2 + 4m_c^2 = 9a^2$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 = 9a^2$

$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$

b) Khi đó $2(\cot B + \cot C) = \frac{2a^2 + 2c^2 - 2b^2}{4S} + \frac{2a^2 + 2b^2 - 2c^2}{4S}$

$$= \frac{4a^2}{4S} = \frac{5a^2 - a^2}{4S} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

Vậy $b^2 + c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow a(\cot B + \cot C) = \cot A$

c) Chứng minh $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_b^2 + \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$= \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

d) Chứng minh $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

Từ công thức Leibnitz: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3Ma^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$. Cho $M \equiv O$ ta có $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\Leftrightarrow 3R^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

Chứng minh hệ thức Leibnitz:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

c) Từ đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 9R^2$. Có đẳng thức $\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

7. a) Trong ΔABC ta luôn có $l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$; $b + c \geq \frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a$;

$$l_a + l_b + l_c < \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$$

b) $$\frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a = \frac{a}{2} + \frac{2\sqrt{bc}\sqrt{3p(p-a)}}{b+c} < \frac{a}{2} + \frac{(b+c).\frac{3(p-a)+p}{2}}{b+c} =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{4p - 2a}{2} = b + c$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi: $2\sqrt{bc} \leq a + b$

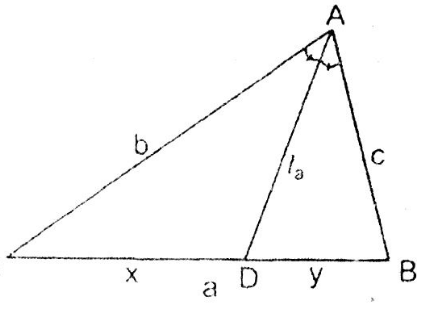
$$\sqrt{3p(p-a)} \leq \frac{3(p-a)+p}{2}$$

c) Từ đó ta có

$$\left.\begin{array}{l} b + c \geq \frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a \\ a + b \geq \frac{c}{2} + \sqrt{3}l_c \\ a + c \geq \frac{b}{2} + \sqrt{3}l_b \end{array}\right\} \Rightarrow 2(a + b + c) \geq \frac{a + b + c}{2} + \sqrt{3}(l_a + l_b + l_c)$$

$$\Rightarrow a(a + b + c) > 2\sqrt{3}(l_a + l_b + l_c) \Rightarrow l_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.(a + b + c)$$

d) Chứng minh $l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$.



Hình 57

Trong ΔACD và ΔABD ta có

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{b^2 + l_a^2 - x^2}{2bl_a} = \frac{c^2 + l_a^2 - y^2}{2cl_a}$$

$$\Rightarrow c(b^2 + l_a^2 - x^2) = b(c^2 + l_a^2 - y^2)$$

$\Leftrightarrow (b-c)l_a^2 = (b-c)bc + by^2 - cx^2$. Ta có $x = \frac{b}{c}y$ và $x + y = a$

$$\Rightarrow x = \frac{ab}{b+c} \quad y = \frac{ac}{b+c}$$

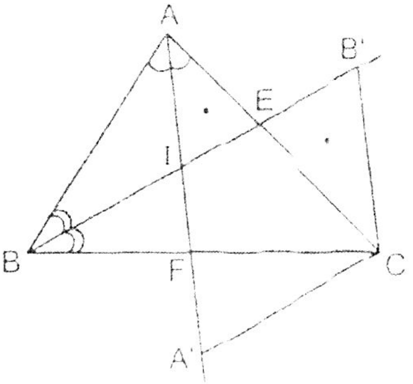
Do đó $(b-c)l_a^2 = (b-c)bc - (b-c)\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$$\Rightarrow l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}2p(2p-2a) = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a) \text{ với } \Delta ABC\ b \neq c$$

8. a) Chứng minh: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Từ C vẽ C_x // AI, C_x gặp BI ở B'. Vẽ C_y // BI, Cy gặp AI ở A'. Trong hình bình hành IB'CA' ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA'}$



Hình 58

- Xét ΔAIE ~ ΔCB'E (gg) $\Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{CB'}{AI} = \frac{IA'}{IA}$

$$\Rightarrow IA' = \frac{a}{c}IA \Rightarrow \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}.$$

- Xét ΔBIF ∽ ΔCA'F (gg)

$$\Rightarrow \frac{FC}{FB} = \frac{b}{c} = \frac{CA'}{IB} = \frac{IB'}{IB} \Rightarrow IB' = \frac{b}{c}IB \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{BC}$$

Vậy $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} = \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IC} + \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} + \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

b) Chứng minh $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$. ∀M.

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + c(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= (a+b+c)\overrightarrow{MI} + (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}) = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$$

c) Chứng minh

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a+b+c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$$

$$aMA^2 = a.\overrightarrow{MA}^2 = a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = a\overrightarrow{MI}^2 + a\overrightarrow{IA}^2 + 2a\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IA}$$

$$= aMI^2 + aIA^2 + 2a\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$$

$$bMB^2 = bMI^2 + bIB^2 + 2b\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB};\ cMC^2 = cMI^2 + cIC^2 + 2c\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$$

$\Rightarrow aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 =$

$= (a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 + 2\overrightarrow{MI}\,(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}).$

$= (a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2\ \forall M.$

d) Chứng minh $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$

Từ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$

$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2ac\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} + 2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 0$

$\Leftrightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) +$

$+ ac(IA^2 + IC^2 - AC^2) + bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + ab + ac)IA^2 + (b^2 + ab + bc)IB^2 + (c^2 + ac + bc)IC^2$

$= acb^2 + bca^2 + abc^2$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2) = abc(a + b + c).$

Vậy $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$

9. Chứng minh trong ΔABC

a) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = \dfrac{a + b + c}{2S} = \dfrac{2p}{2S} = \dfrac{p}{pr} = \dfrac{1}{r}$

b) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p - a}{S} + \dfrac{p - b}{S} + \dfrac{p - c}{S} = \dfrac{3p - (a + b + c)}{S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}.$

c) $r.r_a.r_b.r_c = \dfrac{S}{p}.\dfrac{S}{p - a}.\dfrac{S}{p - b}.\dfrac{S}{p - c} = \dfrac{S^4}{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \dfrac{S^4}{S^2} = S^2$

d) $r_a.r_b + r_br_c + r_cr_a = \dfrac{S}{p - a}.\dfrac{S}{p - b} + \dfrac{S}{p - b}.\dfrac{S}{p - c} + \dfrac{S}{p - c}.\dfrac{S}{p - a}$

$= S^2\left(\dfrac{p - c + p - a + p - b}{(p - a)(p - b)(p - c)}\right) = \dfrac{S^2}{(p - a)(p - b)(p - c)}p = p.p = p^2$

e) $r_a + r_b + r_c = \dfrac{S}{p - a} + \dfrac{S}{p - b} + \dfrac{S}{p - c}$

$= S\left(\dfrac{2}{b + c - a} + \dfrac{2}{a + c - b} + \dfrac{2}{a + b - c}\right)$

Ta có $\dfrac{1}{b + c - a} + \dfrac{1}{a + c - b} \geq \dfrac{2}{\sqrt{(b + c - a)(a + c - b)}}$

$\geq \dfrac{2}{\dfrac{b + c - a + a + c - b}{2}} = \dfrac{4}{2c} = \dfrac{2}{c}.$

Tương tự $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{2}{b}$; $\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{a}$.

Suy ra $r_a + r_b + r_c > 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = h_a + h_b + h_c$ là điều phải chứng minh.

10. Chứng minh $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

$$VT = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = S\left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right]$$

$$= S\left[\frac{p-a+p-b}{(p-a)(p-b)} + \frac{p-p+c}{p(p-c)}\right] = Sc\left[\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]$$

$$= \frac{S_{c.ab}}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R .$$

Vậy $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ hay $r_a + r_b + r = 4R + r$.

b) $\frac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Ta có $\frac{h_a^2}{l_c^2} = \frac{4S^2}{a^2} : \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a) = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)(b+c)^2}{a^2bcp(p-a)}$

$$= \frac{(p-b)(p-c)(b+c)^2}{a^2bc} > \frac{4(p-b)(p-c)}{a^2}$$

c) $\frac{m_a}{l_a} \geq \frac{b+c}{2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \frac{m_a^2}{l_a^2} > \frac{(b+c)^2}{4bc} \Leftrightarrow \frac{4m_a^2}{l_a^2} \geq \frac{b^2+c^2}{bc}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{\frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a)} > \frac{(b+c)^2}{bc}$$

$\Leftrightarrow 2(b^2+c^2) - a^2 > (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2 > 2bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$.

Có đẳng thức khi $b = c$.

d) $m_am_bm_c > l_al_bl_c$. Ta có $4m_a^2 = 2(b^2+c^2-a^2) \geq (b+c)^2 - a^2$

$$= (b+c-a)(b+c+a) \Rightarrow m_a^2m_b^2m_c^2 \geq p^2S^2 .$$

Ta lại có

$$l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a) \leq p(p-a) \Rightarrow l_a^2l_b^2l_c^2 \leq p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2S^2 .$$

Vậy $m_a^2m_b^2m_c^2 > l_a^2l_b^2l_c^2$.

11. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 > 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \qquad (*)$$

$(*) \Leftrightarrow [a^2 - (b - c)^2] + [b^2 - (c - a)^2] + [c^2 - (a - b)^2] \geq 4\sqrt{3}S.$

$\Leftrightarrow (a - b + c)(a + b - c) + (b - c + a)(b + c - a) + (c - a + b)(c + a - b) \geq \sqrt{3}(4S)$

Đặt $\begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + b - c \\ z = b + c - a \end{cases}$ bất đẳng trên tương đương với

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3}\sqrt{(x + y + z)xyz}$$

Vì $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) = \dfrac{a + b + c}{2}.\dfrac{b + c - a}{2}.\dfrac{a + c - b}{2}.\dfrac{a + b - c}{2}$

$= \dfrac{(x + y + z)xyz}{16}$

Mà $xy + yz + zx \geq \sqrt{3}\sqrt{(x + y + z)xyz}$

$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 3(x + y + z)(xyz)$

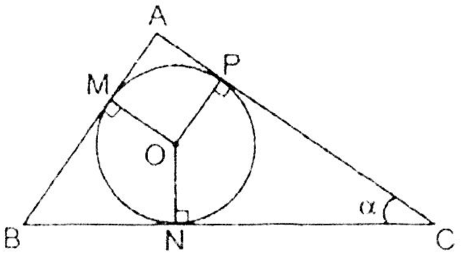
$\Leftrightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + 2xyz(x + y + z) \geq 3(x + y + z)(xyz)$

$\Leftrightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq (xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy)$

$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (xz - xy)^2 \geq 0$ là bất đẳng thức đúng.

Có đẳng thức $\Leftrightarrow xy = yz = zx \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

12. a) $bc(b^2 - c^2)\cos A$



Hình 59

$= bc(b^2 - c^2).\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{1}{2}[b^4 - c^4 - a^2b^2 + a^2c^2]$

$ca(c^2 - a^2)\cos B = ca(c^2 - b^2).\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$

$= \dfrac{1}{2}[c^4 - a^4 - b^2c^2 + a^2b^2]$

$ab(a^2 - b^2)\cos C = ab(a^2 - b^2).\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$= \dfrac{1}{2}[a^4 - b^2 - a^2c^2 + b^2c^2]$

Cộng ba đẳng thức được

$bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$

b) $2abc(\cos A + \cos B) = 2abc.\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) =$

$= ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3$

$= (a+b)ab + c^2(a+b) - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b)[c^2 - a^2 - b^2 + 2ab] = (a+b)[c^2 - (a-b)^2]$

$= (a+b)(c+b-a)(c+a-b)$

c) $abc(\cos A + \cos B + \cos C)$

$= a.\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} + b.\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2} + c.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3)$

$= \dfrac{1}{2}(a^2b + a^2c - a^3 + b^2a + b^2c - b^3 + c^2a + c^2b - c^3)$

$= a^2.\dfrac{b+c-a}{2} + b^2\dfrac{a+c-b}{2} + c^2\dfrac{a+b-c}{2}$

$= a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)$

13. a) ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} \\ a = 2b\cos C \end{cases}$

Vì $\cos C.2b = 2b.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ba} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{a} = a$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = a^2 \Leftrightarrow b = c.$

Thay vào (1) ta có $a^2 = \dfrac{2b^3 - a^3}{2b - a} \Leftrightarrow 2a^2b - a^3 = 2b^3 - a^3$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$

Vậy ΔABC đều. Chứng minh ngược lại dễ dàng được nghiệm.

14. ΔABC vuông $\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

Ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{a^2}{4R^2} + \dfrac{b^2}{4R^2} + \dfrac{c^2}{4R^2} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$

b) ΔABC vuông $3\sin A + 4\cos A = 3$

Ta có $3\sin A + 4\cos A = 3 \Leftrightarrow 4\cos A = 3 - 3\sin A$

$\Leftrightarrow 16\cos^2 A = 9 + 9\sin^2 A - 18\sin A \Leftrightarrow 25\sin^2 A - 18\sin A - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \sin A = 1$ và $\sin A = -\dfrac{7}{25}$ (loại) $\Leftrightarrow A = 90°.$

c) ΔABC vuông $\Leftrightarrow S = p(p - a) = (p - b)(p - c)$

$\Leftrightarrow p^2 - ap = p^2 - (b + c)p + bc \Leftrightarrow (b + c - a)(b + c + a) = 2bc$

$\Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow A = 90^0$.

15. a) ΔABC có $a + b + c \le 3\sqrt{3}R$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2 - AB^2 + 2R^2 - AC^2 + 2R^2 - BC^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 9R^2 \ge AB^2 + AC^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ge \dfrac{(a + b + c)^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3R \ge \dfrac{a + b + c}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a + b + c \le R3\sqrt{3}$.

Các đẳng thức $a + b + c = 3R\sqrt{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Và trong các tam giác cùng nội tiếp đường tròn (O, R) thì Δ đều có chu vi lớn nhất là $3R\sqrt{3}$.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{4r^2} \ge \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{p^2}{4S^2} = \frac{4p^2}{16S^2} = \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

$$= \frac{a + b + c}{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)} = \frac{(a + b - c) + (a + c - b) + (b + c - a)}{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

$\ge \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{a^2}$. Có đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

c) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge \dfrac{1}{2Rr}$

Các bài từ 16 - 25 HS tự làm

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.

I- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

A. Toạ độ của điểm và của vectơ

1. Hệ trục Oxy gồm 2 trục Ox, Oy vuông góc nhau tại O; các vectơ đơn vị: $\vec{i} \in Ox$; $\vec{j} \in Oy$ sao cho $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

2. $M(x,y) \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1)

$\vec{a}(O_1;O_2) \leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (2)

B. Biểu thức tọa độ của các phép toán về vectơ

Cho các vectơ a $(a_1;a_2)$; b $(b_1;b_2)$ và các điểm $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $c(x_C;y_C)$

1. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

2. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

3. $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

4. $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -b_1 \\ a_2 = -b_2 \end{cases}$

5. $k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$

6. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

7. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

$\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$

$$* \cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

8. *$\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{a_1b_1 + a^2b^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

9. $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_A - y_B)$

10. $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

M(x;y) là trung điểm AB

11. $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

12. A,B,C thẳng hàng <=> $\vec{AB} = k\vec{AC}$

($k \neq 1$)

13. G(x;y) là trọng tâm ΔABC

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ $\quad G(x_G;y_G)$

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Chú ý quan trọng

1. $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ <=> $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
2. $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$ <=> $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
3. Ba điểm A,B,C thẳng hàng

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

4. M(x;y) là điểm chia đoạn AB theo tỉ số k: $\vec{MA} = k\vec{MB}$

$$\begin{cases} x = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases} \quad (k \neq 1)$$

k = -1 => M là trung điểm của AB

5. Gọi S là diện tích ΔABC

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(AB^2.AC^2}$

Ví dụ

Trong mặt phẳng Oxy cho A(1; 1); B(5; 2); C(4;4)

a) Xác định toạ độ các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$

b) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng

c) Tính độ dài $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{BC}|, |\overrightarrow{CA}|$

d) Tìm toạ độ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

đ) Tìm toạ độ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

e) Tìm toạ độ trung điểm M của AB

f) Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

Giải:

a) $\overrightarrow{AB}(4;1), \overrightarrow{BC}(-1;2), \overrightarrow{CA}(-3;-3)$

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng

c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\vec{u}(7;4)$

đ) $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

$\vec{v}(9;0)$

e) Toạ độ $M(3;\frac{3}{2})$

f) Toạ độ $G(\frac{10}{3};\frac{7}{3})$

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Cho $\vec{a}(2,-1); \vec{b}(3;4)$. Xác định tọa độ $\vec{c}(x, y)$ nếu $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$; tính $|\vec{c}|$

b) Cho $\vec{a}(3,5); \vec{b}(-2;-4)$. Xác định tọa độ $\vec{d}(x, y)$ nếu $\vec{d} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$; tính $|\vec{d}|$

2. Xác định tọa độ trọng tâm G của ΔABC [(A(1; 3), B(0; 2), C(4; 5))

Kết quả $G\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

$G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$

Kết quả khác.

3. Cho ΔABC : A(4; 6); B(1 ; 4) ; $C\left(7;\frac{3}{2}\right)$

ΔABC có đặc điểm gì ?

Kết quả ΔABC cân

ΔABC vuông

ΔABC đều

4. Cho A(3;1) ; B(1; 3); C(3; 5); D(5; 3)
Tứ giác ABCD là hình gì ?
Kết quả : Hình bình hành
Hình vuông
Kết quả khác

5. a) Cho $\vec{a}(3,2);\vec{b}(-2;5);\vec{c}(-3;4)$.

Xác định tọa độ vectơ $\vec{m}$

$\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$

b) Xác định tọa độ vectơ $\vec{n}$

$\vec{n} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$

c) Xác định tọa độ vectơ $\vec{k}$

$\vec{k} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 4\vec{c}$

6. a) Cho $\vec{a}(4, -5);\vec{b}(1;2)$. Tính $\vec{a}.\vec{b}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

7. a) Cho A(−1;1) ; B(1; 3); C(−2,0). Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.
b) Cho A(2, 4); B(−1; 2); C(1; y). Tìm y để A, B, C thẳng hàng.

8. Cho A(2; 5); B(1; 1); C(3; 3)
a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.
c) Tìm tọa độ D(x, y) để tứ giác ABCD là hình bình hành.
d) Tìm tọa độ trung điểm I của BD.

9. Cho A(1; −3); B(4; 3). Biết A, M, N, B thẳng hàng. Tìm tọa độ M và N để : AM = MN = NB

10. Cho A(−1; 1); B(1; 3); C(2; 0)
a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
b) Chứng minh rằng ΔABC cân.

11. Cho A(−1; −1); B(3; 5); C(−4; 1)
a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
b) Chứng minh rằng ΔABC vuông.
c) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
d) Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

12. Cho ΔABC : A(−4; 1); B(2 ; 4) ; C(2; −2)
a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.
b) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.
c) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
d) Chứng minh rằng I, G, H thẳng hàng.
e) Tính diện tích ΔABC

13. Cho 4 điểm : A(−1; 4); B(5; 6) C(6; 3) ; D(2; 0). Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn.

14. Cho ΔABC : A(−2; 4); B(5; 5); C(6; −2)
a) Xác định tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
b) Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

15. Cho ΔABC: $A(1;5)$; $B(-4;-5)$; $C(4;-1)$

a) Chứng minh rằng ΔABC vuông tại C.

b) $D \in BC$ là chân đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Xác định tọa độ D.

c) $E \in BC$ là chân đường phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$. Xác định tọa độ E.

16. Cho 4 điểm : $A(1;-1)$; $B(4.0)$ $C(6,4)$; $D(0;2)$

a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thang vuông.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD.

17. Cho $\vec{a}(2,-4);\vec{b}(6;-1),\vec{x}(x,y)$. Xác định tọa độ $\vec{x}$ nếu $\begin{cases}\vec{a}.\vec{x}=6\\ \vec{b}.\vec{x}=29\end{cases}$

18. Cho $\vec{a}(m^2+1,3m-2);\vec{b}(2;1)$. Xác định m để:

a) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ b) $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$

19. Gọi φ là góc giữa $(\vec{a},\vec{b})$: xác định cosφ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a}(3;7);\vec{b}(-3;-1)$ b) $\vec{a}(0;-5);\vec{b}(\sqrt{3};1)$ c) $\vec{a}(-5;-5);\vec{b}(2;-2)$

d) $\vec{a}(-3;4);\vec{b}(4;2)$ đ) $\vec{a}(4;3);\vec{b}(1;7)$

20. Cho $\vec{a}(3;7);\vec{b}(-3;-1)$. Tính cosin của góc giữa $(\vec{a}+\vec{b})$ và $(\vec{a}-\vec{b})$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $\vec{c}(11;11);|\vec{c}|=\sqrt{242}$ b) $\vec{d}(8;19);|\vec{d}|=\sqrt{425}$

2. a) $\vec{c}(10;-13)$ b) $\vec{c}(8;-\frac{19}{2})$

c) $\overrightarrow{CE}(-11;-6)$

$F(15;13)$

$G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$

3. ΔABC vuông tại C

4. Tứ giác ABCD là hình vuông vì $\begin{cases}AB=BC=CD=DA\\ AC=BD\end{cases}$

5. a) $\vec{m}(17;-7)$ b) $\vec{n}(-20;28)$ c) $\vec{k}(16;-2)$

6. $\vec{a}+\vec{b}=(5;-3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(3;-7)$

$\vec{a}.\vec{b}=-6$

$\vec{a}.\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=-216$

7. a) $\overrightarrow{AB}=(2;2)$

$\overrightarrow{AC}=(-1;-1)$

$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$ nên A, B, C thẳng hàng.

b) $C\left(1;\frac{10}{3}\right)$

8. a) $\overrightarrow{AB} = (-1; -4)$

$\overrightarrow{AC} = (1; -2)$

$\overrightarrow{BC} = (2; 2)$

Bạn đọc tự kết luận

b) $G(2; 3)$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(4; 7)$

d) $I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$

9. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, M(2; -1)$

$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, N(3; 1)$

10. a) $\overrightarrow{AB}(2; 2)$

$\overrightarrow{AC}(3; -1)$

$\overrightarrow{BC} = (1; -3)$

Bạn đọc tự kết luận

b) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$

ΔABC cân tại C.

11. a) $\overrightarrow{AB}(4; 6); \overrightarrow{AC}(-3; 2)$

$\overrightarrow{BC}(-7; -4)$

Bạn đọc tự kết luận

b) $AB = \sqrt{52}; AC = \sqrt{33}; BC = \sqrt{65}$

ΔABC có : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Vậy ΔABC vuông tại A

c) Tọa độ I là trung điểm BC

$I\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$

d) Bán kính $R = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{65}}{2}$

12. a) Tọa độ trọng tâm G : $G\left(0; \frac{3}{2}\right)$

b) Tọa độ trực tâm H : $H\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

c) $I(x; y)$; $\overrightarrow{IA}(-4 - x; 1 - y)$

$\overrightarrow{IB}(2 - x; 4 - y); \overrightarrow{IC}(2 - x; -2 - y)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2 \\ \overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IC}^2\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{4};1\right)$$

d) $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH}$

Vậy I, G, H thẳng hàng.

e) $S_{\Delta ABC} = 18$ (đơn vị diện tích)

13. $\cos\widehat{B} = 0 \Rightarrow B = 90^\circ$.

$\cos\widehat{D} = 0 \Rightarrow \widehat{D} = 90^\circ$.

$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp.

14. a) $\overrightarrow{AB}(7;1); \overrightarrow{AC}(8;-6); \overrightarrow{BC}(1;-7)$

A, B, C không thẳng hàng.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$I(x;y)$; $\overrightarrow{IA}(6-x;2-y)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2 \\ \overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IC}^2\end{cases} \Rightarrow I(2;1)$$

b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp R = 5 (đơn vị độ dài).

15. a) $\overrightarrow{AB}(-5;-10); \overrightarrow{AC}(3;-6); \overrightarrow{BC}(8;4)$

$AB = 5\sqrt{5}$; $AC = 3\sqrt{5}$; $BC = 4\sqrt{5}$.

$CA^2 + CB^2 = AB^2$

Vậy ΔABC vuông tại C.

b) Tọa độ D : $D\left(-1;-\frac{7}{2}\right)$

c) Tọa độ E : $E(-16;-11)$

16. a) $\overrightarrow{AB}(3;1); \overrightarrow{BC}(2;4); \overrightarrow{CD}(-6;-2); \overrightarrow{DA}(1;-3)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0$

AB// CD

Vậy tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A và D.

b. Diện tích hình thang

$S = 10 + 15\sqrt{2}$ (đơn vị diện tích)

17. $\begin{cases}\vec{a}.\vec{x} = 6 \\ \vec{b}.\vec{x} = 29\end{cases} \Rightarrow \vec{x}(5;1)$

18. a) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$$

b) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$

$$\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{3}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$$

19. a) $\cos\varphi = -\dfrac{8}{\sqrt{145}}$ b) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ$

c) $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ d) $\cos\varphi = -\dfrac{2}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

đ) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

20. $$\left.\begin{array}{l} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{c}(0;6) \\ \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{d}(6;8) \end{array}\right\} \cos\varphi = \dfrac{4}{5}$$

§2. ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

A. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

1. Phương trình tham số

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_o(x_o, y_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2) \neq \vec{0}$

$$(d)\begin{cases} x = x_o + ma_1 \\ y = y_o + ma_2 \end{cases} m \in R$$

2. Phương trình chính tắc

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_o(x_o, y_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2) \neq \vec{0}$

$$(d): \frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}$$

B. Phương trình tổng quát của đường thẳng (d)

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_o(x_o, y_o)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B) \neq \vec{0}$

$$(d)\begin{cases} A(x - x_o) + B(y - y_o) \\ A^2 + B^2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(d)\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A^2 + B^2 \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là phương trình tổng quát của (d)

C. Chú ý

1) Phương trình đường thẳng (d) qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có hệ số góc k là $y - y_0 = k(x - x_0)$
đường thẳng (d) không // với trục Oy.

2) Nếu đường thẳng (d) có $\vec{u}(a_1 ; a_2)$ với $a_1 \neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng (d) là : $k = \dfrac{a_2}{a_1}$

3) Nếu đường thẳng (d) có hệ số góc k thì đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; k)$

4) Đường thẳng (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B) \neq \vec{0}$ thì đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a}(-B; A)$

5) Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A(a; 0) và cắt trục Oy tại B (0; b) ; a, b ≠ 0 thì phương trình đường thẳng (d) theo đoạn chắn là (d) : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (Hình 60)

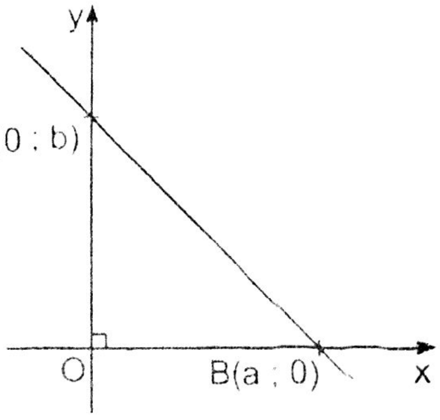
D. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho $(d_1) : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$A_1^2 + B_1^2 \neq 0$
$(d_2) : A_2x + B_2y + C_2 = 0$
$A_2^2 + B_2^2 \neq 0$
Nếu $A_2, B_2, C_2 \neq 0$

1) d_1 cắt $d_2 <=> \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

2) $d_1 // d_2 <=> \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

3) $d_1 \equiv d_2 <=> \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$



Hình 60

E. Góc giữa hai đường thẳng (d_1); (d_2)

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) => $\varphi = \left((d_1);\ (d_2)\right)$

(d_1) có $\vec{n_1}(A_1 ; B_1)$; (d_2) có $\vec{n_2}(A_2 ; B_2)$;

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Với $0° \leq \varphi < 90°$

F. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng (Δ) :

$Ax + By + C = 0$

$$d(M_0;(\Delta)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Chú ý 1) Nếu $d(M_0, (\Delta)) = 0$ thì $M_0(x_0; y_0) \in (\Delta)$

2) Nếu có $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$

a) $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0$ thì M_1; M_2 cùng phía với (Δ)

b) $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0$ thì M_1; M_2 khác phía với (Δ)

Trong đó $(\Delta) : Ax + By + C = 0$

3) Một đường thẳng được hoàn toàn xác định nếu biết $M_0(x_0; y_0) \in (d)$

a) biết $\vec{a}(a_1, a_2)$

b) biết $\vec{n}(A, B)$

c) biết hệ số góc k.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng (d)

Phương pháp

a) Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2)$ của (d)

b) Tìm toạ độ $M_0(x_0; y_0) \in (d)$

c) Viết phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc của (d)

1. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) trong các trường hợp sau

Đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0, y_0)$ và $\vec{a}(a_1; a_2)$

a) $M_0(2; 1)$; $\vec{a}(3; 4)$

b) $M_0(5; -2)$; $\vec{a}(-1; 2)$

II. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (d)

Phương pháp

a) Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B) \neq 0$ của (d)

b) Tìm điểm $M_0(x_0; y_0) \in (d)$

c) Áp dụng công thức $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

d) Đưa phương trình về dạng

$Ax + By + C = 0$

2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d) trong các trường hợp sau :

a) qua Mo (1; 2) ; $\vec{n}(4; 7)$

b) qua Mo (2; −5) ; $\vec{n}(3; -1)$

c) qua Mo (3; −2) ; $\vec{a}(4; 3)$

Vấn đề 1

Từ phương trình tham số của đường thẳng (d) hãy viết phương trình chính tắc của (d), và phương trình tổng quát. Biết phương trình tổng quát của đường thẳng (d). Hãy viết phương trình tham số của (d)

3. Viết phương trình chính tắc và phương trình tổng quát của (d) trong mỗi trường hợp sau

a) (d) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

b) (d) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -5 - 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

c) (d) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

d) (d) $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

4. Hãy viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng (d) trong mỗi trường hợp sau

a) (d) : $7x - 2y - 7 = 0$

b) (d) : $x - 2y - 1 = 0$

5. Cho ΔABC, M, N, K lần lượt là trung điểm BC, CA, AB với M(−1; −1); N(1 ; 9); K(9 ; 1)

a) Hãy xác định toạ độ các điểm A, B, C

b) Viết Phương trình tham số, tổng quát của các đường trung tuyến của ΔABC.

Vấn đề 2

Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng. Lập phương trình đường thẳng thoả mãn các điều kiện cho trước

6. Hãy xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây, nếu chúng cắt nhau, hãy tìm toạ độ giao điểm của chúng.

a) $(d_1) : 2x + 3y + 1 = 0$

$(d_2) : 4x + 5y - 6 = 0$

b) $(d_1) : 4x - y + 2 = 0$

$(d_2) : -8x + 2y + 1 = 0$

c) $(d_1) \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ $(d_2) \begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -7 + 3u \end{cases}$ $t, u \in \mathbf{R}$

d) $(d_1) : x + y - 5 = 0$

$(d_2) \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$

d) $(d_1)\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ $\quad (d_2): \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-6}$

e) $(d_1): \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+3}{5}$ $\quad (d_2): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+18}{10}$

7. Lập phương trình tham số của đường thẳng (d) trong mỗi trường hợp sau :

a) qua A $(-1; 2)$ và // (d'): $5x - 2y + 1 = 0$

b) qua B $(7; -5)$ và ⊥ (d') : $x + 3y - 6 = 0$

c) qua C$(-2; 3)$ và có hệ số góc $k = -3$.

d) qua M$(3; 6)$ và N$(5; -3)$

Chú ý

1) Nếu (d) //(d') thì hai đường thẳng qua $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$ với $M_1 \neq M_2$ nhưng có cùng vectơ chỉ phương $\vec{u}$ hoặc cùng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

2) Nếu (d) ⊥ (d') thì vectơ chỉ phương của (d) là vectơ pháp tuyến của (d') và ngược lại.

3) đường thẳng (d) qua M_1, M_2 với $M_1 \neq M_2$ thì $\overrightarrow{M_1M_2}$ là một vectơ chỉ phương của (d).

8. Cho ΔABC, biết đỉnh C$(4; -1)$ đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình tương ứng là :

$(d_1) : 2x - 3y + 12 = 0$
$(d_2) : 2x + 3y = 0$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC

9. Cho ΔABC, biết A$(1; 3)$ và hai trung tuyến xuất phát từ B và C lần lượt có phương trình:

$(d_1) : y - 1 = 0$
$(d_2) : x - 2y = 0$

Lập phương trình các cạnh của ΔABC

10. Lập phương trình các cạnh của ΔABC nếu biết B$(-4;-5)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình

$(d_1) : 5x + 3y - 4 = 0$
$(d_2) : 3x + 8y + 13 = 0$

11. Một cạnh của ΔABC có trung điểm M$(-1; 1)$, hai cạnh kia lần lượt nằm trên hai đường thẳng

$(d_1) : 2x + 6y + 3 = 0$

$(d_2)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases} t \in \mathbf{R}$

Lập phương trình cạnh thứ 3 của ΔABC.

12. Cho hình vuông ABCD, đỉnh A$(-4; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình :

(d) : $7x - y + 8 = 0$

Lập phương trình các cạnh của hình vuông và đường chéo thứ hai.

13. Cho ΔABC, biết G là trọng tâm của tam giác : G(−2;−1) phương trình cạnh AB : (d_1) : $4x + y + 15 = 0$; phương trình cạnh AC : (d_2) : $2x + 5y + 3 = 0$. Viết phương trình cạnh BC của ΔABC.

Vấn đề 3

Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng

Phương pháp

1) Để tính khoảng cách từ $M_o(x_o; y_o)$ đến đường thẳng (Δ), áp dụng công thức :

$$d(M_o,(\Delta)) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2) Cho (Δ_1) : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (1)

Cho (Δ_2) : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (2)

Giả sử (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau.

Gọi (d_1); (d_2) là hai phân giác của góc hợp bởi (Δ_1) và (Δ_2)

$M(x; y) \in (d_1); (d_2)$ < > $d(M, \Delta_1) = d(M,\Delta_2)$

$$< > \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Vậy phương trình hai phân giác của góc hợp bởi (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt có phương trình

a) $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B}} = \dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

b) $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B}} = -\dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

II. BÀI TẬP VÀ CÂU HỎI

14. Cho ΔABC có A(−1; 2); B(2; 1) H là trực tâm ΔABC : H(1; 2)

a) Tìm toạ độ điểm C.

b) Lập phương trình các cạnh của ΔABC

15. Cho ΔABC biết A(−2; 1); B(1; 3) và C(2; −2)

1) Viết phương trình các cạnh của ΔABC

2) Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$

16. Cho hai đường thẳng (d1) : $2x - y - 1 = 0$

(d2) : $2x - y - 7 = 0$

a) Tính khoảng cách giữa (d1) và (d2)

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song và cách đều (d_1); (d_2)

17. Cho điểm M(1; 2). Lập phương trình đường thẳng (d) qua M và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

18. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M (2; 7) và cách điểm N(1; 2) một khoảng bằng 1.

19. Cho $(d_1) : x - 3y + 6 = 0$

$(d_2) : 2x - y - 3 = 0$

Lập phương trình đường thẳng (d) đối xứng của (d_2) qua (d_1)

20. Cho ΔABC biết phương trình cạnh BC :

$$d(BC) : 4x - y + 3 = 0$$

Hai đường phân giác trong của góc B và góc $\widehat{C}$ lần lượt có phương trình

$(d_1) : x - 2y + 1 = 0$; $(d_2) : x + y + 3 = 0$

Lập phương trình các cạnh AB, AC của ΔABC.

21. Cho A(0; 2) ; B(2 ; −2) và đường thẳng (d) : $x - y - 1 = 0$

Tìm $M(x, y) \in (d)$ sao cho

a) MA + MB = nhỏ nhất

b) |MA − MB| = lớn nhất

c) |MA − MA| = nhỏ nhất

Vấn đề 4

Góc giữa hai đường thẳng

Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng

$$(\Delta_1) : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$(\Delta_2) : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (*)$$

$(0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$

a) Xác định $\vec{n}_1; \vec{n}_2$ của (Δ1); (Δ2)

b) áp dụng công thức (*) . Tính cos φ

c) Trong một số trường hợp đặc biệt tính số đo của góc φ

22. Tìm góc giữa hai đường thẳng trong các trường hợp sau :

a) $(d_1) : 4x - 2y + 6 = 0$

$(d_2) : x - 3y + 1 = 0$

b) $(d_1) : x + 2y + 4 = 0$

$(d_2) : 2x - y + 6 = 0$

23. Cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

$$(\Delta)\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad t \in R$$

$$(\Delta')\begin{cases} x = -3 + u \\ y = 2u \end{cases} \quad u \in R$$

a) Tính cosin của góc tạo bởi (Δ) và (Δ')

b) Viết phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi (Δ) và (Δ')

24. Cho ΔABC cân tại A

Phương trình các cạnh

BC: $d_{(BC)}: 2x - 3y - 5 = 0$

AB: $d_{(AB)}: x + y + 1 = 0$

Lập phương trình cạnh AC biết cạnh đó đi qua điểm M(1; 1).

25. Cho điểm A(1; 2) và đường thẳng (Δ) : $2x - 6y + 3 = 0$

a) Tìm trên đường thẳng (Δ) hai điểm B và C sao cho ΔABC vuông cân tại A.

b) Tính diện tích ΔABC.

Vấn đề 6

Các bài tập tự luyện

26. Cho 3 đường thẳng (Δ1), (Δ2), (Δ3) lần lượt có các phương trình

$$(\Delta 1): 3x - 2y + 1 = 0$$
$$(\Delta 2): 2x - 3y + 5 = 0$$
$$(\Delta 3): 2x - 7y - 2 = 0$$

a) Tìm toạ độ các giao điểm : $A = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$

$B = (\Delta_1) \cap (\Delta 3)$; $C = (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$

b) Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (Δ_3).

c) Tìm toạ độ H là hình chiếu của A xuống đường thẳng (Δ_3).

d) Tìm toạ độ K là điểm đối xứng của A qua (Δ_3).

27. Tìm tập hợp các điểm M(x; y) cách đều hai đường thẳng

$$(d_1): x - 3y + 6 = 0$$
$$(d_2): x + y - 9 = 0$$

28. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M(2; 5) và cách đều hai điểm A(−1; 2) và B(5; 4).

29. Cho A(−2; 1) ; B(1 ; 3) ; C(2 ; −2)

a) Tính độ dài AB, AC

b) Tính cosBAC

c) Viết phương trình các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A và góc B của ΔABC.

30. Cho 3 điểm A(−1;1); B(1 ; 4) ; I(1 ; $\frac{5}{2}$). Tìm toạ độ đỉnh C của ΔABC nếu I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

1. a) $(\Delta)\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases} t \in R$

$$(\Delta): \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{4}$$

b) $(\Delta)\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases} t \in R$

$(\Delta): \frac{x-5}{1} = \frac{y+2}{2}$

Không có phương trình chính tắc

Chú ý :

$\vec{a}(a_1;a_2)$ nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$ thì không có phương trình chính tắc.

2. a) (d) : $4(x - 1) + 7(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 7y - 18 = 0$

b) (d) : $3(x - 2) - (y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - y - 11 = 0$

c) do $\vec{a}(4; 3) \Rightarrow \vec{n}(3; -4)$

(d) : $3(x - 3) - 4(y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 4y - 17 = 0$

Vấn đề 1

3. a) $(d)\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} t \in R$

$\vec{a}(-2;1)$

Phương trình chính tắc (d)

$(d): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{1}$

Khi đó $\vec{n}(1; 2)$, Mo(1; 3)

Phương trình tổng quát (d)

$(x - 1) + 2(y - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

* *Chú ý :* Ta có thể viết phương trình tổng quát của (d) khi biết phương trình tham số và phương trình chính tắc của (d) như sau :

Cách 1 : Từ phương trình tham số của đường thẳng (d) – Khử tham số t

$(d)\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ 2y = 6 + 2t \end{cases}$

Cộng từng vế :

$x + 2y - 7 = 0$

Cách 2 : Từ phương trình

$(d): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{1}$

$\Leftrightarrow x - 1 = -2(y - 3) \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

b) (d)$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -5 - 3t \end{cases} t \in \mathbf{R}$

Phương trình chính tắc của (d)

$$(d): \frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 5}{-3}$$

* Phương trình tổng quát của (d)

$$\begin{cases} -3x = -6 + 3t(a) \\ y = -5 - 3t(b) \end{cases}$$

Cộng từng vế : $-3x + y = -11$

$< > 3x - y - 11 = 0$

hoặc từ phương trình chính tắc của (d)

$-3(x - 2) = -(y + 5)$

$\Leftrightarrow -3x + 6 = -y - 5 < > 3x - y - 11 = 0$

Câu c, d : Bạn đọc tự giải với chú ý :

c) Không có phương trình chính tắc chỉ có phương trình tổng quát $x + 3 = 0$

d) Không có phương trình chính tắc chỉ có phương trình tổng quát $y - 2 = 0$

4. a) (d) : $7x - 2y - 7 = 0$

Cách 1 : Có $\vec{n}(7; -2) => \vec{a}(2; 7)$

$Mo(1; 0) \in (d)$

Phương trình tham số của (d)

(d)$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7t \end{cases} t \in \mathbf{R}$

Phương trình chính tắc của (d)

$$(d): \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{7}$$

Cách 2 : Đặt $y = t$

$7x - 2t - 7 = 0$

$< > 7x = 7 + 2t < > x = 1 + \frac{2}{7}t$

(d)$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{7}t \\ y = t \end{cases} t \in \mathbf{R}$

b) Độc giả tự giải với một trong các phương pháp trên.

5. a) $A(11; 11)$; $B(7; -9)$; $C(-9; 7)$

b) Phương trình cạnh AB

(AB)$\begin{cases} \text{qua } K(9;1) \\ \vec{a} = \overrightarrow{MN} = (2;10) \end{cases}$

$$d(AB)\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = 1 + 10t \end{cases} t \in R$$

$d(AB): 5x - y - 44 = 0$

Tương tự cho ta các kết quả :

$(d)BC: x + y - 2 = 0$

$(d)AC: x - 5y + 44 = 0$

6. a) $\vec{n}_{d1} = \vec{n}_1(2;3)$

$\vec{n}_{d2} = \vec{n}_2(4;5)$

$\vec{n}_1; \vec{n}_2$ không cùng phương vậy (d_1) cắt (d_2). Tọa độ giao điểm $M_o\left(\frac{23}{2}; -8\right)$

b) $\vec{n}_1(4; -1); \vec{n}_2(-8; 2)$.

Ta có : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

$(d_1) // (d_2)$

c) $\vec{a}_{d1} = \vec{a}_1(1;2)$

$\vec{a}_{d2} = \vec{a}_2(2;3)$

(d_1) cắt (d_2)

Tìm tọa độ giao điểm Mo

$$\begin{cases} 5 + t = 4 + 2u \\ -3 + 2t = -7 + 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2u = -1 \\ 2t - 3u = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ t = -5 \end{cases}$$

Thay u, t vào phương trình của (d_1) hoặc (d_2) ta được

Tọa độ giao điểm : $M(0; -13)$

d) Thay x, y từ phương trình (d_2) vào phương trình (d_1)

$5 + t - 1 - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$

$Mo(6; -1)$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau.

đ) Đưa phương trình (d_2) về dạng tham số

$$(d2)\begin{cases} x = 2 + 3u \\ y = -4 - 6u \end{cases} u \in \mathbf{R}$$

$\vec{a}_{d1}(-1;2); \vec{a}_{d2}(3;-6)$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 - t = 2 + 3u \\ -2 + 2t = -4 - 6u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 3u = -1 \\ 2t + 6u = -2 \end{cases}$$

Hệ vô số nghiệm nên $(d_1) \equiv (d_2)$

e) Bạn đọc tự giải.

7. a) (d') : $\vec{n}_{d'}(5;-2) \Rightarrow \vec{a}_{d'}(2;5)$

Đường thẳng (d) qua A $(-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(2,5)$

$$(d)\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 5t \end{cases} t \in \mathbf{R}$$

b) (d') : $\vec{n}_{d}(1;3) \Rightarrow$ Vì (d) ⊥ (d') nên vectơ pháp tuyến của (d') là vectơ ch
phương của (d)

$$(d)\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases} t \in \mathbf{R}$$

c) Phương trình (d) có dạng :

$y - y_o = k(x - x_o)$

$\Leftrightarrow y - 3 = -3(x + 2)$

$\Leftrightarrow -3x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 3 = 0$

$\vec{n}(3;1) \Rightarrow \vec{a}(-1;3)$

Vậy phương trình tham số của (d)

$$(d)\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 3t \end{cases} t \in \mathbf{R}$$

d) $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (2;-9)$

Đường thẳng (d) qua M (hoặc qua N) có $\vec{a}(2;-9)$

$$(d)\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 - 9t \end{cases} t \in \mathbf{R}$$

8. Phương trình cạnh BC :

Vì (BC) ⊥ (d_1) nên

(BC) : $3x + 2y + C = 0$

Vì C ∈ (BC) $\Rightarrow C = 10$

Thay $C = 10$ vào phương trình (BC)

(BC) : $3x + 2y - 10 = 0$

Phương trình cạnh (AC) :

$A = (d_1) \cap (d_2)$: Tọa độ A là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;2)$$

Phương trình cạnh (AC) được xác định bởi :

$$(AC)\begin{cases} \text{qua}A(-3;2) \\ \text{qua}C(4;-1) \end{cases}$$

(AC) : $3x + 7y - 5 = 0$

Phương trình cạnh (AB) :

Gọi M là trung điểm BC :

$M = (d) \cap BC$

$\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(6; -4)$

Xác định tọa độ B

$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Rightarrow B(8; -7)$

Phương trình cạnh (AB)

$(AB)\begin{cases} \text{qua}A(-3; 2) \\ \text{qua}B(8; -7) \end{cases}$

$(AB): 9x + 11y + 5 = 0$

9. Gọi (x;y) là trọng tâm ΔABC

$G = (d_1) \cap (d_2)$

Toạ độ G là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 1)$

* Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua G

$\begin{cases} x_A + x_{A_1} = 2x_G \\ y_A + y_{A_1} = 2y_G \end{cases} \Rightarrow A_1(1; -1)$

Viết phương trình đường (Δ_1) qua A_1 và song song với (d_1)

$(\Delta_1)\begin{cases} \text{qua } (1; -1) \\ \text{có vectơ chỉ phương của } (d_1) \end{cases}$

$(\Delta_1): x - 2y - 3 = 0$

* $B = (\Delta_1) \cap (d_2)$. Toạ độ B là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} B(5; 1)$

* Hoàn toàn tương tự ta có toạ độ $C(-3; 1)$

* Từ đó ta có phương trình các cạnh

$d_{(AB)}: x + 2y - 7 = 0$

$d_{(BC)}: x - 4y - 1 = 0$

$d_{(AC)}: x - y + 2 = 0$

10. Chú ý: $B(-4; -5) \notin (d_1)$

$B \in (d_2)$

* Phương trình cạnh AB vuông góc với đường cao (d_1) có dạng:

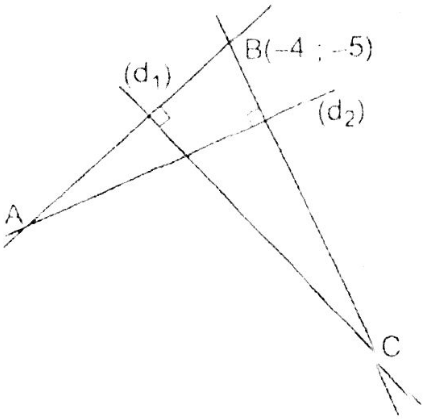
$(AB): 3x - 5y + C = 0$ do $B \in AB$

nên thay toạ độ B vào phương trình (AB) ta được $C = -13$.

$(AB): 3x - 5y - 13 = 0$

* Phương trình cạnh $BC \perp (d_2)$ có dạng:

$(BC): 8x - 3y + C = 0$



Hình 61

* Thay toạ độ B vào phương trình (BC) ta được $C = 17$

$(BC): 8x - 5y + 17 = 0$

* Toạ độ $A = (BA) \cap (d_2)$

$A(1; -2)$

* Toạ độ $C = (BC) \cap (d_1)$

$C(-1; 3)$

* Phương trình (AC):

$(AC): 5x + 2y - 1 = 0$

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 22 = 0 \end{cases} B(2;4)$$

* Phương trình đường thẳng AC: qua A và vuông góc với (d_2) có dạng:

$2x - 7y + C = 0$

* Vì d(AC) qua A => $C = -5$

$d(AC): 2x - 7y - 5 = 0$

* Phương trình đường thẳng BC, qua B và vuông góc với (d_1) có dạng:

$3x + 4y + C = 0$

* Vì d(BC) qua B => $C = -22$

$d(BC): 3x + 4y - 22 = 0$

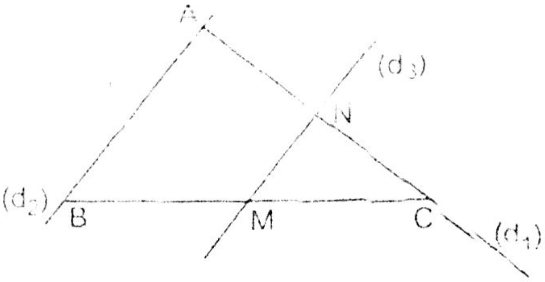
* $C = d_{(AC)} \cap d_{(BC)}$

Toạ độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 22 = 0 \\ 2x - 7y - 5 = 0 \end{cases} C(6;1)$$

* Phương trình đường cao xuất phát từ C là đường (d_3) qua C và vuông góc với AB

$(d_3): 3x + 5y - 23 = 0$



Hình 62

11. $(d_2) \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases} t \in R$

phương trình tổng quát của (d_2):

$x + y - 2 = 0$

* Đặt $d_{(AB)}: x + y - 2 = 0$

$d_{(AC)}: 2x + 6y + 3 = 0$

* Dễ thấy $M \in d_{(AB)}$; $M \notin d_{(AC)}$

Vậy M là trung điểm BC.

* $A = d_{(AB)} \cap d_{(AC)}$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 6y + 3 = 0 \end{cases} A(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4}).$$

* Lập phương trình (d_3) qua M và // (d_2)

$(d_3): x + y + C = 0$

do (d_3) qua $M(-1; 1) \Rightarrow C = 0$

$(d_3): x + y = 0$

* Gọi $N = (d_1) \cap (d_3)$

$$\begin{cases} 2x + 6y + 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

* Xác định toạ độ C:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_N \\ y_A + y_C = 2y_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_N - x_A \\ y_C = 2y_N - y_A \end{cases}$$

$C\left(\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

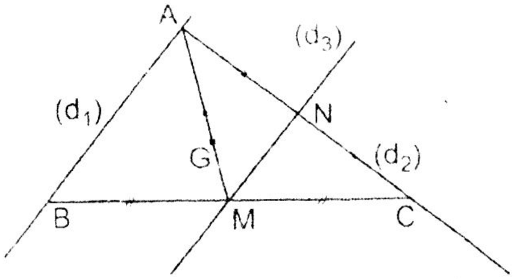
* Toạ độ B:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases}$$

* Lập phương trình đường thẳng (d) qua B,C.

$$(d) \begin{cases} \text{qua } B \\ \vec{a} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

(Bạn đọc tự giải)



Hình 63

12. * $A(-4; 5)$

* $(d): 7x - y + 8 = 0$

* $A \notin (d) \Rightarrow B, D \in (d)$

Cách giải tương tự như bài 9

Bạn đọc tự giải.

13. * Xác định toạ độ A: $A = (d_1) \cap (d_2)$

$A(-4; 1)$

* Xác định toạ độ $G(2;2)$

* Gọi $M(x; y)$ sao cho M là trung điểm cạnh BC ⇒

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

$\overrightarrow{AM}(x + 4; y - 1)$

$$\begin{cases} x + 4 = 3 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$M(-1; -1)$

Cách giải tương tự như bài 19

Bạn đọc tự giải tiếp.

14. a) Toạ độ điểm C: C (2;5)

b) Phương trình các cạnh của ΔABC

* (AC): $x - y + 3 = 0$

* (BC): $x - 2 = 0$

* (AB): $x + 3y - 5 = 0$

15. a) Phương trình các cạnh của ΔABC

* (AB): $2x - 3y + 7 = 0 : (d_1)$

* (BC): $5x + y - 8 = 0 : (d_2)$

* (CA): $3x + 4y + 2 = 0 : (d_3)$

b) Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của BAC

Gọi M(x; y) là điểm ∈ đường thẳng (d) là phân giác của góc BAC thì khoảng cách từ M đến AB bằng khoảng cách từ M đến AC, nghĩa là:

$$d(M, d_1) = d(M, d_3) \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y + 2|}{\sqrt{x^2 + 4^2}} = \frac{|2x - 3y + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x + 4y + 2|}{5} = \frac{|2x - 3y + 7|}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13}\,(3x + 4y + 2) = \pm 5(2x - 3y + 7)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3\sqrt{13} - 10)x + (4\sqrt{13} + 15)y - 35 + 2\sqrt{13} = 0(d_4)\\ (3\sqrt{13} + 10)x - (15 + 4\sqrt{13})y + 35 + 2\sqrt{13} = 0(d_5)\end{array}\right.$$

Để xác định phương trình nào là phương trình phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$

* Nếu B và C nằm khác phía (d_4) hoặc (d_5) thì (d_4) hoặc (d_5) là phương trình phân giác trong; phương trình còn lại là phương trình đường phân giác ngoài.

* Nếu B và C nằm cùng một phía của (d_4) hoặc (d_5) thì một trong hai đường đó là phương trình phân giác ngoài phương trình đường còn lại là phương trình đường phân giác trong.

Bạn đọc tự kiểm tra.

16. a) *Nhận xét:* $(d_1) // (d_2)$

Xét A (1; 1) ∈ (d_1)

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách từ A đến (d_2):

$$d(A, d_2) = \frac{|2.1 - 1 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Vậy: $d(d_1, d_2) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

b) Gọi M (x; y) là điểm ∈ (Δ)

Cách đều (d_1) và (d_2)

$$\frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y - 7|}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow |2x - y - 1| = |2x - y - 7|$

$\Leftrightarrow 2x - y - 1 = -(2x - y - 7)$

$\Leftrightarrow (\Delta): 2x - y - 4 = 0$

Vậy phương trình đường (Δ) cách đều (d_1) và (d_2)

$(\Delta): 2x - y - 4 = 0$

17. Áp dụng phương trình theo đoạn chắn

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Do chắn trên hai trục toạ độ các đoạn thẳng có độ dài bằng nhau nên

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

a) $a = b$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \ (d)$$

Do (d) qua M (1; 2) nên:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 3$$

$(d): x + y - 3 = 0$

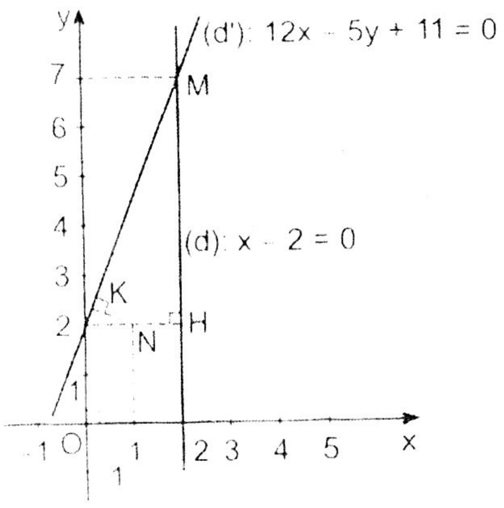
b) $a = -b$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 (d')$$

Thay toạ độ M (1; 2) vào (d'):

$$\frac{1}{a} + \left(\frac{-2}{a}\right) = 1 \Rightarrow a = -1.$$

$\Leftrightarrow (d'): x - y + 1 = 0$



Hình 64

18. a) *Trường hợp 1*

Xét đường thẳng đi qua M song song với trục oy có phương trình $x - 2 = 0$ (d)

Rõ ràng (d) cách điểm N một khoảng bằng 2

Vậy (d): $x - 2 = 0$ là một đường thẳng cần tìm.

(Xem hình vẽ)

b) *Trường hợp 2*

Xét đường thẳng (d') qua M không song song với trục Oy, phương trình có dạng:

$y - 7 = k(x - 2)$ (d')

$\Leftrightarrow kx - y - 2k + 7 = 0$ (d')

đường thẳng (d') cách N (1; 2) một khoảng bằng 1

$$\Leftrightarrow d(N, d') = \frac{|k(1) - (2) - 2k + 7|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{|k + 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow k^2 - 10k + 25 = k^2 + 1$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{12}{5}$

với $k = \dfrac{12}{5}$ ta có phương trình:

(d'): $12x - 5y + 11 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

* (d): $x - 2 = 0$

* (d'): $12x - 5y + 11 = 0$

19. (d_1): $x - 3y + 6 = 0$

(d_2): $2x - y - 3 = 0$

Lập phương trình (d) đối xứng của (d_2) qua (d_1)

Ta có: $A = (d_1) \cap (d_2)$

$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} A(3;3).$

Cách 1

* Lập phương trình (d) qua A có hệ số góc k, đường thẳng này không song song với trục Oy, có dạng:

$kx - y + 3 - 3k = 0$

* Lấy $H \in (d_1)$: H (0; 2)

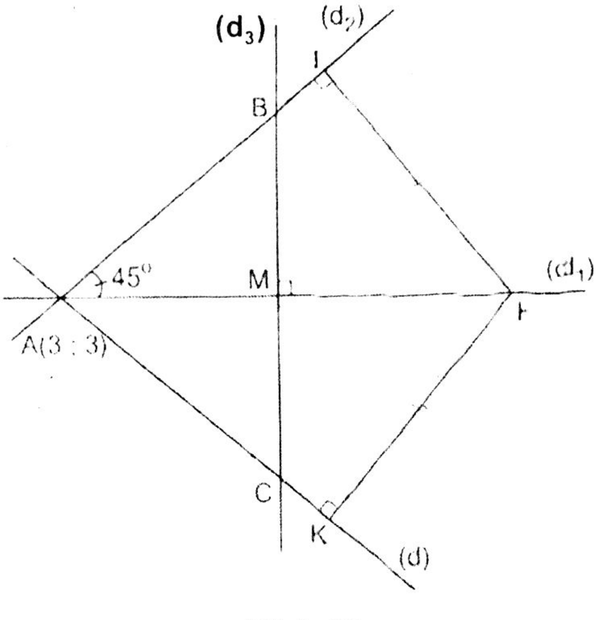
* Khoảng cách từ H đến (d_2):

$d(H, d_2) = \sqrt{5}$

* Để (d) đối xứng với (d_2) qua (d_1) thì khoảng cách từ H đến (d) = $\sqrt{5}$

$d(H;d) = \dfrac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 2k^2 - 7k - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$



Hình 65

* Với k = 2 loại vì $(d) \equiv (d_2)$

* Với $k = -\dfrac{1}{2}$: (d): $x + 2y - 2 = 0$

Cách 2

* Lấy B (2; 1) $\in (d_2)$

* Lập phương trình (d_3) qua B và vuông góc với (d_1)

* $M = (d_2) \subset (d_3)$.

* Xác định toạ độ C là điểm đối xứng của B qua M.

* Viết phương trình (d) qua AC.

Cách 3

Gọi φ là góc giữa (d_1) và (d_2)

$\vec{n}_{1}(1;3);\ \vec{n}_{d_2}(2;1)$

$$\cos\varphi = \frac{|2.1 + 3|}{\sqrt{10}.\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} => \varphi = 45^0$$

Vậy đường thẳng (d) đối xứng với (d_2) qua (d_1) thì (d) tạo với (d_1) góc 45^0 hay góc giữa (d) và (d_2) bằng 90^0.

Từ đó chỉ cần viết phương trình đường (d) vuông góc với (d_2) tại A.

$$(d)\begin{cases} \text{qua}A \\ \vec{n}_d = \vec{a}_{d_2} = (1;2) \end{cases}$$

Bạn đọc tự giải tiếp

20. Xác định toạ độ B: $B = d_{(BC)} \subset (d_1)$

Toạ độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} => B(-\frac{5}{7};\frac{1}{7})$

* Do (d_1) là phân giác của $\widehat{B}$, nên cạnh AB sẽ đối xứng với BC qua (d_1)

* Chọn $M(0;3) \in d_{(BC)}$

Lập phương trình đường Δ qua M và vuông góc $d_{(BC)}$

$$(\Delta)\begin{cases} \text{qua}M \\ \vec{n}\Delta = \vec{a}_{BC} = (2;1) \end{cases}$$

(Δ): $2x + y - 3 = 0$

* $H(x, y) = (\Delta) \in d_{(BC)}$

$H(1; 1)$

* Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng Δ

$$\begin{cases} x_M + y_N = 2x_H \\ y_M + y_N = 2y_H \end{cases} => N(2; 1)$$

* Phương trình cạnh AB chính là phương trình đường thẳng qua B và N

$$d_{(AB)}\begin{cases} \text{qua } B(-\frac{5}{7};\frac{1}{2}) \\ \text{qua } N(2;1) \end{cases}$$

$d_{(AB)}$: $8x + 19y + 3 = 0$

* Tương tự: Cạnh AC đối xứng với BC qua (d_2)

Đề nghị bạn đọc giải tiếp như đã trình bày ở trên về phương trình cạnh AB.

21. (h. 66)

a) *Nhận xét:*

* Thay toạ độ A vào phương trình đường thẳng (d):

$0 - 2 - 1 = -3 < 0$

* Thay toạ độ B vào phương trình đường thẳng (d):

$2 - 4 - 1 = -3 < 0$

* Vậy A và B cùng nằm về một phía của đường thẳng (d).

* Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d)

Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc (d)

$$(\Delta)\begin{cases}\text{qua A}\\ \vec{n}_\Delta = \vec{a}_d = (1;1)\end{cases}$$

$(\Delta): x + y - 2 = 0$

* $H = (\Delta) \in d$ toạ độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x - y - 1 = 0\\ x - y - 2 = 0\end{cases}$$

$H(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$

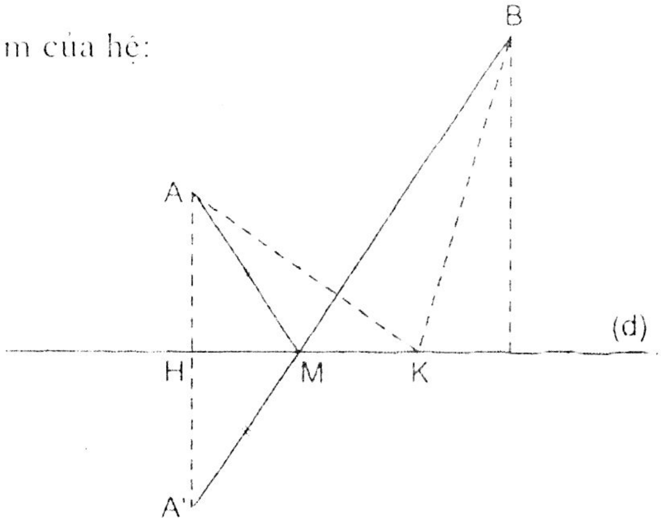
* Xác định toạ độ A'.

$$\begin{cases}x_A + x_{A'} = 2x_H\\ y_A + y_{A'} = 2y_H\end{cases}$$

qua Mo (1; 2) ; $\vec{n}$ (4; 7)

$\vec{a}(a_1, a_2)$ $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$

* Tọa độ A'(3; −1)



Hình 66

Ta có: Nếu K là điểm bất kỳ ∈ (d) thì KA+KB ≥ AB.

Vậy KA+KB nhỏ nhất <=> KA+KB =AB.

*Mặt khác ta có:

MA+MB =MA'+MB =MA+MB =AB

⇔ A',M,B thẳng hàng và M nằm trong đoạn A'B.

*Để xác định M ∈ (d) thì M =(d) ⋂ d(A'B).

*Lập phương trình đường d(A'B)

$$d(A'B)\begin{cases}\text{qua B}\\ \vec{a} = \overrightarrow{BA'} = (1; -5)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{d(A'B)} = (5;1)$$

Vậy phương trình d(A'B)=(d')

(d) = $5x + y - 14 = 0$.

*Tọa độ M= (d') ∩ (d)

$$\begin{cases}x - y - 1 - 10\\ 5x + y - 14 = 0\end{cases}$$

$M(\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

Vậy để MA+MB = nhỏ nhất và $M \in (d)$ thì $M(\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

b) | MA − MB |= lớn nhất

Ta có: | MA − MB | ≤ AB

nên | MA − MB | lớn nhất = AB.

Khi đó điểm M thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$$\{M \in (d) \begin{cases} M\ (d) \\ M, A, B \text{ thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn AB} \end{cases}$$

M,A,B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn AB

Ta xác định điểm M như sau:

*Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A, B

*Tìm tọa độ M: M= (Δ) ∩ (d)

Chú ý:

a) Nếu (Δ) ∩ (d)=M bài toán có nghiệm

b) Nếu(Δ)//(d) bài toán vô nghiệm

c) | MA − MA | nhỏ nhất.

Ta có: | MA − MB | ≥ 0. Vậy

| MA − MB | = nhỏ nhất <=> MA=MB

Tức là M thuộc trung trực của AB

M thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

$$\begin{cases} M \in (d) \\ M \in (\Delta') \text{là trung đoạn của AB.} \end{cases}$$

M= (d) ∩ (Δ')

Bài toán vô nghiệm nếu (Δ') ⊥ (d)

Đề nghị bạn đọc tự giải và kiểm tra kết quả của câu b) và c)

22. a) Kết quả: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$

b) Kết quả: $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0$

(d_1) và (d_2) vuông góc nhau.

23. a) Kết quả: $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^0$

b) Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi (Δ) và (Δ')

*(d): $x - 3y + 3 = 0$

*(d'): $3x + y + 9 = 0$

24. Δ ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$

Nếu tính được $\cos\widehat{B}$, ta tính được $\cos\widehat{C}$

* Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua M(1;1) và có hệ số góc k, phương trình có dạng:

$y - 1 = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y + 1 - k = 0$

đường thẳng này không song song với Oy.

* Cos B trong đó $\hat{B}$ là góc nhọn giữa AB và BC

$$\text{Cos B} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

*Cos C: trong đó $\hat{C}$ là góc giữa BC và đường thẳng (Δ)

$$\text{Cos C} = \frac{|2k + 3|}{\sqrt{13}.\sqrt{k^2 + 1}}$$

do $\cos B = \cos C \Rightarrow \dfrac{\sqrt{26}}{26} = \dfrac{|2k + 3|}{\sqrt{13}.\sqrt{k^2 + 1}}$

$$\Leftrightarrow 7k^2 + 24k + 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -\dfrac{17}{7} \end{array}\right.$$

(a − b + c = 0)

* $k = -1$: (Δ_1): $x + y - 2 = 0$

(Loại vì Δ_1 qua M nhưng song song với AB)

* $k = -\dfrac{17}{7}$: (Δ_2): $17x + 7y - 24 = 0$.

Vậy phương trình cạnh BC là: (Δ): $17x + 7y - 24 = 0$

25. a) (d) là đường thẳng qua A có hệ số góc k (đường thẳng này klông song song với trục Oy):

$y - 2 = k(x - 1)$ (d)

$\Leftrightarrow kx - y + 2 - k = 0$; $\vec{n}_d\,(k;1)$

Gọi φ là góc giữa (d) và (Δ)

$$\text{Cos}\,\varphi = \frac{|2k + 6|}{2\sqrt{10}.\sqrt{k^2 + 1}}$$

Để Δ ABC vuông cân tại A => $\varphi = 45^0$

$$\Leftrightarrow \text{Cos}\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

* $k = 2$: (d_1): $2x - y = 0$

$C = (d_2) \cap (\Delta)$: $C(\dfrac{3}{10}; \dfrac{3}{5})$

* $k = -\dfrac{1}{2}$: (d_2): $x + 2y - 5 = 0$

$B = (d_2) \cap (\Delta)$: $B(\dfrac{12}{15}; \dfrac{13}{10})$

Vậy Δ ABC vuông cân tại A: $(d_1) \perp (d_2)$

b) $S_{ABC} = \dfrac{49}{20}$ (đơn vị diện tích)

26. a) Tọa độ các điểm A, B, C của Δ ABC : $A(\dfrac{7}{5};\dfrac{13}{5})$; $B(-\dfrac{11}{17};-\dfrac{8}{17})$; $C(-\dfrac{41}{8};-\dfrac{7}{4})$

b) Đường thẳng (Δ) qua A và vuông góc với (Δ_3)
(Δ): $7x + 2y - 15 = 0$.

c) Tọa độ hình chiếu H của A xuống đường thẳng (Δ_3): $H(\dfrac{109}{53};\dfrac{16}{53})$

d) Tọa độ k đối xứng của A qua (Δ_3) $k(\dfrac{719}{265};-\dfrac{529}{265})$

27. Tập hợp các điểm M(x;y) cách đều hai đường thẳng
(d_1): $x - 3y + 6 = 0$
(d_2): $x + y - 9 = 0$
(Δ_1): $(\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} + 3)y - (9\sqrt{5} + 6) = 0$
(Δ_2): $(\sqrt{5} + 1)x - (3 + \sqrt{5})y + 6 - 9\sqrt{5} = 0$

28. Đường thẳng qua M có dạng
$a(x - 2) + b(y - 5) = 0 \quad (\Delta)$
* Vì đường thẳng này cách đều A và B nên:

$$d(A;\Delta) = d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|a(-3) + b(-3)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(3) + b(-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-3a - 3b| = |3a - b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -3a; a \neq 0 \end{array}\right. \quad \text{chọn } a = 1 \Rightarrow b = -3$$

Vậy ta được hai đường thẳng
a) $b = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ (Δ_1)
b) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} : x - 3y + 13 = 0 (\Delta_2)$

29. a) $AB = \sqrt{13}$; $AC = 5$

b) $\cos BAC = \dfrac{6\sqrt{13}}{65}$

c) Phương trình các đường phân giác trong và phân giác ngoài.
* Của góc A

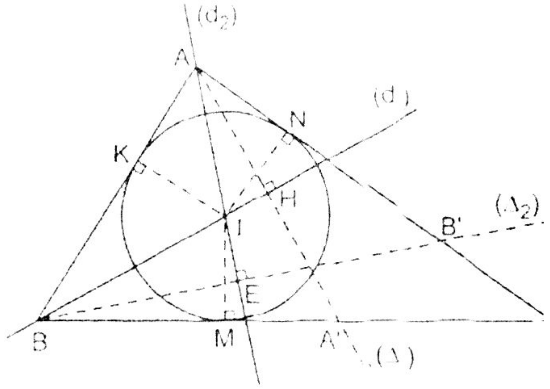
$$\left[\begin{array}{l} (3\sqrt{13} - 10)x + (4\sqrt{13} + 15)y - 35 + 2\sqrt{13} = 0 \\ (3\sqrt{13} + 10)x - (4\sqrt{13} + 15)y + 35 + 2\sqrt{13} = 0 \end{array}\right.$$

* Của góc B

$$\left[\begin{array}{l} (5 - 2\sqrt{2})x + (3\sqrt{2} + 1)y - 7\sqrt{2} - 8 = 0 \\ (5 + 2\sqrt{2})x - (3\sqrt{2} - 1)y + 7\sqrt{2} - 8 = 0 \end{array}\right.$$

30. (h. 67)

Do I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên I là giao điểm của phân giác trong của góc $\hat{A}$ và góc $\hat{B}$ của ΔABC.



Hình 67

Phương trình đường thẳng (d_1) qua BI

$(d_1): x - 1 = 0$

Phương trình đường thẳng (d_2) qua AI

$(d_2): 3x - 4y + 7 = 0$

(Δ_1) là đường thẳng qua A và vuông góc với (d_1)

$(\Delta_1): y - 1 = 0$

$H = (d1) \cap (\Delta 1)$

$H(1; 1)$

(Δ_2) là đường thẳng qua B và vuông góc với (d_2)

$(\Delta_2): 4x + 3y - 16 = 0$

$E = (d_2) \cap (\Delta_2)$

$E\left(\frac{43}{25}; \frac{76}{25}\right)$

Gọi A` là điểm đối xứng của A qua $(d_1)$: A` ∈ BC.

A'(3; 1) ∈ BC

Gọi B` là điểm đối xứng của B qua $(d_2)$ B` ∈ AC.

$B'\left(\frac{61}{25}; \frac{52}{25}\right) \in BC$

Phương trình đường thẳng (d_3) qua AB`

$(d_3): 27x - 86y + 113 = 0$

Phương trình đường thẳng (d_4) qua BA`

$(d_4): 3x + 2y - 11 = 0$

$C = (d_3) \cap (d_4)$

$C\left(\frac{30}{13}; \frac{53}{13}\right)$

§ 3. ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

A. Phương trình đường tròn

1) Phương trình tổng quát của đường tròn

$$(C)\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ a^2 + b^2 - c > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ghi nhớ

a) $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

b) Trong phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) phải thoã mãn tất cả các yêu cầu sau

* Các hệ số của x^2 và y^2 phải bằng nhau.

* Trong phương trình (1) không chứa số hạng x.y

* $a^2 + b^2 - c > 0$

c) Nếu không thoả mãn một trong các điều kiện trên thì không tồn tại phương trình đường tròn.

2) Đường tròn (C) tâm I (a; b) và bán kính R có phương trình

(C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (2)

3) Trường hợp đặc biệt: Tâm I ≡ O (0; 0)

(C): $x^2 + y^2 = R^2$ (3)

B. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in$ (C) tâm I (a; b) có phương trình:

(d): $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$ (4)

Chú ý: Trong phương trình (4) khai triển và rút gọn để được phương trình về dạng $Ax + By + C = 0$

II. BÀI TẬP

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Nhận dạng một phương trình là phương trình đường tròn – Tìm tâm và bán kính.

Phương pháp

Cách 1

a) Chuyển phương trình ban đầu về dạng

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

b) Kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$

c) Khi đó phương trình (C) có $\begin{cases} I(a;b) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases}$

Cách 2

a) Đưa phương trình ban đầu về dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ (*)

b) Nếu $k > 0$ thì phương trình (*) là phương trình đường tròn

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases}$$

1. Trong phương trình sau : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 43 = 0$

có phải là phương trình đường tròn không. Kiểm tra điều kiện

$a^2 + b^2 - c > 0$

Kết quả

$a^2 + b^2 - c > 0$

$a^2 + b^2 - c < 0$

Kết quả nào là đúng, Kết luận.

2. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình củ đường tròn. Tìm tâm và bán kính nếu có :

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 7 = 0$

d) $2x^2 + y^2 - 4x - 10y + 9 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2xy + 4y - 10 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 6x + 8xy - 4 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$

h) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$

k) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 14 + m^2 = 0$

(với m là tham số)

m) $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0$

(với m là tham số)

Vấn đề 2

Lập phương trình đường tròn (C)

(Xác định tâm I và bán kính R)

Phương pháp

1. Gọi (C) là phương trình thoả mãn điều kiện đầu bài, muốn đưa phươn trình về dạng

a) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Lập hệ 3 phương trình, với 3 ẩn số là a, b, c với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$

Giải hệ để xác định a, b, c.

Viết phương trình đường tròn

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Tìm toạ độ tâm I(a, b)

Tính bán kính R.

Viết phương trình đường tròn.

2) *Chú ý :*

a) Cần cân nhắc kỹ giả thiết để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.

b) Nếu đường tròn (C) đi qua hai điểm phân biệt A và B và I là tâm đường tròn : I(x; y) thì ta có :

$IA^2 = IB^2 = R^2$ => Tìm I.

c) (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với (Δ) : Ax + By + C = 0 thì :

IA = d(I, A)

d) (C) đi qua 3 điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng : dùng hệ phương trình 3 ẩn để đưa về dạng phương trình a) hoặc b) đã nêu ở trên.

d) Nếu đường tròn (C) tâm I tiếp xúc với 2 đường thẳng (Δ_1) ; (Δ_2) thì $d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2)$

c) Nếu đường tròn (C) nhận AB làm đường kính thì : $I(x_I, y_I)$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ R = \dfrac{AB}{2} = IA = IB \end{cases}$$

f) Ngoài các phương pháp trên, ta có thể sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình đường tròn.

3. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB trong các trường hợp sau :

a) A(7; −3) ; B(1; 7)

b) A(−3; 2) ; B(7; −4)

4. Lập phương trình đường tròn (C) đi qua A(3; 1); B(5; 5) và tâm I thuộc trục Oy.

5. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong các trường hợp sau :

a) A(1; 4) ; B(−4; 0); C(−2; −2)

b) A(1; 1) ; B(3; −2); C(4; 3)

c) A(1; 3) ; B(5; 6) ; C(7; 0)

6. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh trên 3 đường thẳng sau :

$(\Delta_1) : x - 5y - 2 = 0$

$(\Delta_2) : x - y + 2 = 0$

$(\Delta_3) : x + y - 8 = 0$

7. Lập phương trình đường tròn biết

a) Tâm I(2; 2); bán kính R = 3.

b) Đi qua điểm A(3; 1) ; tâm I(1; 2)

c) qua A(3; 1); B(5; 5) tâm I thuộc trục Ox.

d) Có tam I(−2; 0) và tiếp xúc với đường thẳng (Δ) 2x + y − 1 = 0

8. Lập phương trình đường tròn (C) qua A(1; 2); B(3; 1) và tâm I thuộc đường thẳng (Δ)

(Δ) : 7x + 3y + 1 = 0

9. Lập phương trình đường tròn (C) có :

Tâm I(5; 6) và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d)\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3t \end{cases} t \in \mathbf{R}$$

10. Cho hai đường thẳng :

$(d_1) : 2x + y - 1 = 0$; $(d_2) : 2x - y + 2 = 0$.

Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với (d_1); (d_2) và có tâm I thuộc đường thẳng (d_3) có phương trình

$(d_3) : x - y - 1 = 0$

11. Lập phương trình đường tròn (C) qua điểm M(−1; −2) và tiếp xúc với đường (d) : $7x - y - 5 = 0$ tại điểm N(1; 2)

12. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng (d)

(d) : $x - y - 2 = 0$

tại điểm M(3; 1)

và tâm I thuộc đường thẳng (Δ)

(Δ) : $2x - y - 2 = 0$

13. Lập phương trình đường tròn (C) đi qua A(2; −1) và tiếp xúc với trục Ox, Oy.

14. Cho điểm A(8, 0); B(0; 6)

a) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔAOB

b) Lập phương trình đường tròn nội tiếp của ΔAOB.

c) Cho A(4; 0); B(0; 3). Lập phương trình đường tròn nội tiếp ΔAOB.

15. Cho đường tròn (C)

(C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

Lập phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua A(1;2).

16. Cho đường tròn (C)

(C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

Lập phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng :

(Δ) : $x - 2 = 0$

17. Cho ΔABC : B(0; 1) ; C(1; 0) và trực tâm H (2; 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vấn đề 3

Tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp : Ta xét các trường hợp sau

Giả sử đường tròn (C) có tâm I

I(a; b); bán kính R.

1. Trường hợp 1

Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$

Gọi (d) là đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M_0 (Ta có một trong hai phương trình)

$(d) : (x_o - a)(x - a) + (y_o - b)(y - b) = 0 (1)$

$x_ox + y_oy - a(x_o + x) - b(y_o + y) + c = 0 (2)$

Công thức (1) và (2) được gọi là công thức phân đôi toạ độ, chỉ được áp dụng khi $M_o(x_o, y_o)$ là tiếp điểm của (C)

2. Trường hợp 2

Điểm $M_o(x_o, y_o)$ nằm ngoài đường tròn (C)

Chú ý : Nếu $M_o(x_o, y_o)$ nằm trong đường tròn (C) thì không tồn tại tiếp tuyến.

Bước 1.

Lập phương trình đường thẳng (d) qua điểm $M_o(x_o, y_o)$ có dạng

$Ax + By + C = 0$ hoặc

$y - y_o = k(x - x_o) <=>$

$kx - y + y_o - kx_o = 0 ; \vec{n}(k; -1)$

Bước 2

(d) là tiếp tuyến của (C) <=>

$d(I; d) = R$ (bán kính)

Bước 3

Kết luận về các phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C)

Chú ý : Trường hợp này phải xét cả tiếp tuyến qua $M_o(x_o, y_o)$ và song song với trục Oy.

3. Trường hợp 3

Tiếp tuyến song song với đường thẳng

$(d) : Ax + By + C = 0$

Khi đó tiếp tuyến có dạng : $(d') : Ax + By + D = 0$

4. Trường hợp 4

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$(d) : Ax + By + C = 0$

Khi đó tiếp tuyến có dạng : $(d') : Bx - Ay + E = 0$

5. Trường hợp 5

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng (Δ) cho trước góc φ.

Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của(d)

$\vec{a}(a_1; a_2) \neq \vec{0}$

Gọi $\vec{b}$ là vectơ chỉ phương của(Δ)

$\vec{b}(a_1; a_2) \neq \vec{0}$

Áp dụng công thức :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$(0^o < \varphi < 90^o)$

$(d) : Ax + By + C = 0$

18. Lập phương trình tiếp tuyến tại M(3; 4) của đường tròn (C)

$(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Kết quả a) $M \subset (C)$

$M \not\subset (C)$

b) Phương trình tiếp tuyến :

$2x + y - 7 = 0$

$x + y - 7 = 0$

Kết quả khác.

19. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ và đường thẳng (d)

$(d) : 3x + 4y - 3 = 0$

a) Tìm toạ độ giao điểm A và B của (d) và (C).

b) Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại A và B.

20. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ và điểm A(1; 3)

a) Chứng minh rằng A nằm ngoài (C)

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến xuất phát từ A.

21. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng (d)

$(d) : 2x + y - 1 = 0$

Lập phương trình đường (Δ) là tiếp tuyến của (C) biết rằng (Δ) song song với (d).

22. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ và đường thẳng (d)

$(d) : 3x - y + 4 = 0$

Lập phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) vuông gốc vó đường thẳng (d).

23. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 2.

24. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(C) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng (Δ)

$(\Delta) : 2x + y - 4 = 0$

một góc $\varphi = 45^\circ$.

25. Cho đường tròn (C) có phương trình

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

và điểm M(2; 4)

a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = −1.

26. Cho ba điểm : $A(1; 1)$; $B(-2; 2)$; $C(-1; -2)$

Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$

27. Cho ba điểm : $A(1; 2)$; $B(-3; 1)$; $C(4; -2)$

Tìm tập hợp các điểm M sao cho : $MA^2 + MB^2 = MC^2$

Vấn đề 4

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
2. Vị trí tương đối của hai đường tròn
3. Phát triển tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

28. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

(C_1) : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$

(C_2) : $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$

29. Cho hai đường tròn.

(C_1) : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 7 = 0$

(C_2) : $x^2 + y^2 - 32x - 24y + 300 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung.

30. Cho họ đường (C_m) có phương trình

$x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$

a) Chứng minh rằng $\forall m$ thì họ đường cong (C_m) là đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\forall m$ thì tất cả các đường tròn thuộc họ (C_m) đều cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. $a^2 + b^2 - c < 0$

2. Các phương trình:

c); d); đ) không phải là phương trình đường tròn vì

* Các hệ số x^2, y^2 không bằng nhau

* Hoặc có chứa số hạng xy

k) $a^2 + b^2 - c = -(1 + m^2) < 0$

nên không phải là phương trình đường tròn

m) là phương trình đường tròn đúng với mọi giá trị của m

Các phương trình còn lại đều là phương trình đường tròn

Đề nghị bạn đọc tự xác định tâm I và bán kính R.

3. a) $I(4; 2)$; $R = \sqrt{34}$

b) $I(2; -1)$; $R = \sqrt{34}$

c); d) Đề nghị bạn đọc tự giải

4. (C): $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

5. a) Giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔABC có dạng:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$a^2 + b^2 - c > 0$.

* Điểm $A(1; 4) \in (C)$

$1 + 16 - 2a - 8b + c = 0 \quad (1)$

* Điểm $B(-4; 0) \in (C)$

$16 + 8a + c = 0 \quad (2)$

* Điểm $C(-2; -2) \in (C)$

$4 + 4 + 4a + 4b + c = 0 \quad (3)$

Giải hệ phương trình (1); (2); (3) với các ẩn a,b,c ta được:

$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = -20$

(C): $x^2 + y^2 - x - y - 20 = 0$

b) Nhận xét ΔABC vuông tại A.

$$\begin{cases} I\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{26} \end{cases}$$

$$(C): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

c) Đề nghị bạn đọc tự giải.

6. Giả sử phương trình 3 cạnh của ΔABC.

$d_{(AB)}$: $x - 5y - 2 = 0$

$d_{(BC)}$: $x - y + 2 = 0$

$d_{(AC)}$: $x + y - 8 = 0$

Xác định toạ độ các điểm A, B, C.

$A = d_{(AB)} \cap d_{(AC)}$

$A(7; 1)$

$A = d_{(BC)} \cap d_{(AB)}$

$A(-3; -1)$

$A = d_{(BC)} \cap d_{(AC)}$

$A(3; 5)$

Phương trình đường tròn (C).

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (*)$

$a^2 + b^2 - c > 0$

Thay toạ độ A, B, C vào phương trình (*) ta được:

$a = 2$; $b = 0$

7. a) (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$

b) (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

c) (C): $(x - 10)^2 + y^2 = 50$

d) Bán kính R bằng khoảng cách từ I đến (d): $2x + y - 1 = 0$

$R = \sqrt{5}$

(C): $(x + 2)^2 y^2 = 5$.

8. Giả sử phương trình đường tròn (C):

$$(C)\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ a^2 + b^2 - c > 0 \end{cases}$$

* A (1; 2) ∈ (C) $\Leftrightarrow 5 - 2a - 4b + c = 0$ (1)

* B (3; 1) ∈ (C) $\Leftrightarrow 10 - 6a - 2b + c = 0$ (2)

* Tâm I (a; b) ∈ (Δ):

$\Leftrightarrow 7a + 3b + 1 = 0$ (3)

Giải hệ phương trình (1); (2); (3):

$$a = \frac{1}{2};\ b = -\frac{3}{2};\ c = -10$$

(C): $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$.

9. a) Chuyển phương trình (d) về dạng tổng quát : (d) : $3x - 4y - 6 = 0$

Gọi R là bán kính đường tròn (C);

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ R = d(x; (d)) = 3.

(C) : $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 9$

b) Đề nghị bạn đọc tự giải.

10. Giả sử đường tròn (C) tâm I(a; b) và bán kính R

Theo giả thiết I ∈ (d_3) : nên

$\Leftrightarrow a - b - 1 = 0$ (1)

(C) do tiếp xúc với (d_1) và (d_2) nên tâm I ∈ phân giác của góc tạo bởi (d_1) và(d_2).

Các đường phân giác của góc tạo bởi (d1) và (d2) có phương trình :

$$\frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 1 = \pm (2x - y + 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta_1) : 2y - 3 = 0 \\ (\Delta_2) : 4x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

b) Nếu I(a; b) ∈ (Δ_2): $a = -\frac{1}{4};\ b = \frac{5}{4}$

$$R_2 = d(I;(d_2)) = \frac{11\sqrt{5}}{20}$$

$$(C_2) : \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{80}$$

Vậy tồn tại hai đường tròn thỏa mãn điều kiện đầu bài.

11. Vì đường tròn (C) tiếp xúc với (d) tại N(1; 2) nên tâm I của (C) ∈ đường thẳng (Δ)

$$(\Delta)\begin{cases} \text{qua}N(1;2) \\ \vec{a}(7;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta)\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 2 - t \end{cases} t \in R$$

do đó tâm I (1 + 7t ; 2 − 5)

(C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi: $IN = R \Leftrightarrow IN^2 = R^2 = 50t^2$

Phương trình đường tròn (C) có dạng :

(C) : $(x - 1 - 7t)^2 + (y - 2 + t)^2 = 50t^2$

Theo giả thiết $M(-1; -2) \in (C)$

$(-1 - 1 - 7t)^2 + (-2 - 2 + t)^2 = 50t^2 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-6;3)$

và bán kính $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Phương trình đường tròn (C)

(C) : $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$

12. Đường tròn (C) tiếp xúc với (d) tại điểm M(3; 1), nên tâm I của (C) thuộc đường thẳng (Δ)

$$(\Delta')\begin{cases} \text{qua} M(3;1) \\ \vec{n}(1;1) \end{cases}$$

Δ') : $x + y - 4 = 0$

$I = (d) \cap (\Delta')$: Tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2;\ 2)$$

* (C) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow R^2 = IM^2 = 2$

(C) : $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$

13. Giả sử I(a; b) là tâm đường tròn (C) do (C) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy.

nên $|a| = |b| = R$

Trường hợp 1 $a = b$

(C) : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

* Do $A(2 ; -1) \in (C) \Leftrightarrow (2 - a)^2 + (-1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$

phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2: $a = -b$

(C) : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

* Do $A(2 ; -1) \in (C) \Leftrightarrow (2 - a)^2 + (-1 + a)^2 = a^2$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

Với $a = 1$: $b = -1$; $R = 1$

(C) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

Với $a = 5$: $b = -5$; $R = 5$

(C) : $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

14. a) AB là đường kính : ΔOAB vuông tại O; I là trung điểm AB

$$R = \frac{1}{2}AB$$

$AB = 5$

(C) : $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b) (C) : $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

15. (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow$ (C) : I(2; 1) ; $R = \sqrt{2}$

(C') đối xứng với (C) qua A(1; 2) => (C') có $R = \sqrt{2}$

Tâm I' đối xứng với I qua A(1; 2)

$$\begin{cases} x_I + x_{I'} = 2x_A \\ y_I + y_{I'} = 2y_A \end{cases}$$

Suy ra : I'(0; 3)

(C')$x^2 + (y - 3)^2 = 2$

16. Đường tròn (C) có I(1; 2) ; $R = \sqrt{2}$

(C') có tâm I'(a; b) và $R' = \sqrt{2}$

Đường tròn (C) và (C') đối xứng nhau qua (Δ) : x − 2 = 0 tức là I và I' đối xứng nhau qua (Δ)

I'(3;2)

(C') $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$

17. Để ý rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua cạnh BC.

* Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔHBC, gọi là đường tròn (C).

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2b + c = 0 \\ a^2 + b^2 - c > 0 \end{cases} \quad (*)$$

(C) qua B, C, H ⇒ thay tọa độ B, C, H vào phương trình (*) ta được

$$\begin{cases} 1 - 2b + c = 0 \\ 1 - 2a + c = 0 \\ 5 - 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

(C) : $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

I(1; 1) và R = 1.

Phương trình cạnh BC : (BC) : x + y − 1 = 0

Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (BC)

(BC) : x + y − 1 = 0

I'(a'; b') đối xứng với I(1; 1) qua (BC) : x + y − 1 = 0

$$\begin{cases} I'(0,0) \\ R = 1 \end{cases}$$

(C') $x^2 + y^2 = 1$

Vấn đề 3

18. HS tự giải

19. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 4y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 7y = 0 \end{cases}$

Ta được A (1; 0) B(−3; 3)

b) Phương trình tiếp tuyến của (C)

* tại A : $x - 7y - 1 = 0$

* Tại B : $7x + y + 18 = 0$

20. a) Đề nghị độc giả tự chứng minh

b) Gọi $M_o(x_o, y_o)$ là tiếp điểm

Ta có : $x_o^2 + y_o^2 - 6x_o + 2y_o + 6 = 0$

Phương trình tiếp tuyến có dạng :

$x_ox + y_oy - 2(x_o + x) + (y_o + y) + 6 = 0$

Do tiếp tuyến qua A(1; 3)

$x_o + 3y_o - 2(x_o + 1) + (y_o + 3) + 6 = 0 <=> x_o + 2y_o - 7 = 0$

Giải hệ $\begin{cases} x_o + 2y_o - 7 = 0 \\ x_o^2 + y_o^2 - 6x_o + 2y_o + 6 = 0 \end{cases}$

Xác định tọa độ (x_o, y_o)

Ta có hai tiếp tuyến

* $x - 1 = 0$

* $3x + 4y - 15 = 0$

21. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) có phương trình (Δ)

$$2x + y + c = 0$$

(Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) <=> $d(x; \Delta) = R$.

Xét (C) có :

$I(1; -3)$ và $R = \sqrt{5}$

$d(I, \Delta) = \dfrac{|2.1 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{5} <=> |c - 1| = 5$

$c - 1 = 5 \Rightarrow c = 6$

$c - 1 = -5 \Rightarrow c = -4$

Vậy có hai tiếp tuyến

$(\Delta_1) : 2x + y + 6 = 0$

$(\Delta_2) : 2x + y - 4 = 0$

22. Đường tròn (C) có $I(3; -1)$; $R = \sqrt{10}$

(Δ) vuông góc với (d)

$(\Delta) : x + 3y + c = 0$

để (Δ) là tiếp tuyến của (C)

$d(I, \Delta) = \dfrac{|3 + 3(-1) + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow c = \pm 10.$

Ta có hai tiếp tuyến

$(\Delta_1) : x + 3y + 10 = 0$

$(\Delta_2) : x + 3y - 10 = 0$

23. Đường tròn (C) óc $I(2; 1)$; $R = 2\sqrt{5}$

Đường thẳng (d) có hệ số góc $k = 2$.

$(d) : y = 2a + m \Leftrightarrow 2x - y + m = 0$

(d) là tiếp tuyến với (C)

$\Leftrightarrow d(I; (d)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 - 1 + m|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5}$$

$\Leftrightarrow |m + 3| = 10$

Ta được hai tiếp tuyến

$m = 7 : (d_1) : 2x - y + 7 = 0$

$m = -13 : (d_2) : 2x - y - 13 = 0$

24. Giả sử tiếp điểm là $M_o(x_o, y_o)$

Khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng :

$(d)\ (x - 1)(x_o - 1) + (y + 1)(y_o + 1) = 10$

$(d) \Leftrightarrow (x_o - 1)x + (y_o + 1)y - x_o + y_o - 8 = 0 \ (1)$

Do $M_o(x_o, y_o) \in (C)$

$(x_o - 1)^2 + (y_o + 1)^2 = 10 \ (2)$

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45°

$$\Leftrightarrow \cos 45^o = \frac{|2(x_o - 1) + 1(y_o + 1)|}{\sqrt{4+1}\sqrt{(x_o - 1)^2 + (y_o + 1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow |2x_o + y_o - 1| = 5$

$$\left[\begin{array}{ll} y_o = 6 - 2x_o & (3) \\ y_o = -4 - 2x_o & (4) \end{array}\right.$$

Giải các hệ phương trình : $\begin{cases} (x_o - 1)^2 + (y_o + 1)^2 = 10 \\ y_o = 6 - 2x_o \end{cases}$

$M_1(2; 2); M_2(4; -2)$

$$\begin{cases} (x_o - 1)^2 + (y_o + 1)^2 = 10 \\ y_o = -4 - 2x_o \end{cases}$$

$M_3(0; -4); M_4(-2; 0)$

Thay các tọa độ M_1, M_2, M_3, M_4 vào phương trình tiếp tuyến (1). Ta được : 4 tiếp tuyến của (C)

$(d_1) : x + 3y - 8 = 0$

$(d_2) : 3x - y - 14 = 0$

$(d_3) : x + 3y + 12 = 0$

$(d_4) : 3x - y + 6 = 0$

25. a) $(C) : I(1; 3); R = 2$; $M(2; 4)$

$\overrightarrow{IM}(1;1)$

Đường thẳng (Δ) qua M có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IM}(1;1)$

$(d)\ x + y - 6 = 0$

b) Làm tương tự như bài tập 7.

Có hai tiếp tuyến : $(\Delta_1) : x + y - 4 - 2\sqrt{2} = 0$

$(\Delta_2) : x + y - 4 + 2\sqrt{2} = 0$

26. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$

$(x - 1;\ y - 1)(x + 2;\ y - 2) +$

$(x + 2;\ y - 2)(x + 1;\ y + 2) +$

$(x + 1;\ y + 2)(x - 1;\ y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C)

$(C) :\ 3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$

27. $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MC}^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + 3)^2 + (y - 1)^2$

$= (x - 4)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C)

$(C) : x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0$

28. Đường tròn

$(C_1) : I_1(4;\ 1)\ R_1 = \sqrt{10}$

$(C_2) :\ I_2\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right) R_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Xét đường thẳng $(\Delta)\ \ mx - y + p = 0$

Điều kiện tiếp xúc : $\begin{cases} d(I_1;\Delta) = R_1 \\ d(I_2;\Delta) = R_2 \end{cases}$

Ta được hai tiếp tuyến chung : $(\Delta_1) : 3x + y - 3 = 0$

$(\Delta_2) : x + 3y - 17 = 0$

29. a) Hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại A(8; 6)

b) Phương trình tiếp tuyến chung tại tiếp điểm A(8; 6)

$(\Delta) : 4x + 3y - 50 = 0$

30. a) Xét $a^2 + b^2 = c$

$= m^2 + (m + 1)^2 - (2m - 1) = m^2 + m^2 + 2m + 1 - 2m + 1$

$= 2m^2 + 2 > 0\ \forall m$

Vậy tất cả các đường cong (Cm) đều là họ đường tròn (Cm)

b) Vì họ (Cm) cắt trục Oy nên $x = 0 \Leftrightarrow$ phương trình

$y^2 - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0\ (*)$

để (Cm) cắt trục Oy tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm y_1, y_2 phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m + 1)^2 - (2m - 1)$

$= m^2 + 2m + 1 - 2m + 1 = m^2 + 2 > 0\ \forall m$

MỤC LỤC

		trang
Phần I.	ĐẠI SỐ	3
Chương I.	Mệnh đề – Tập hợp	3
Chương II.	Hàm số bật nhất và bậc 2	19
Chương III.	Phương trình – Hệ phương trình	48
Chương IV.	Bất đẳng thức và bất phương trình	106
Chương V.	Thống kê	133
Chương VI.	Góc lượng giác và công thức lượng giác	157
Phần II.	HÌNH HỌC	201
Chương I.	Vectơ	201
Chương II.	Hệ thức lượng trong tam giác và đường tròn	235
Chương III.	Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng	254

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG

Sửa bài: NGỌC HUỆ

Trình bày bìa: THÁI VĂN

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 10

Mã số: 1L – 79 ĐH 2006
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp in Tuần Báo Văn Nghệ - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 41 - 2006/CXB/ 9 – 282/ĐHQGHN, ngày 10/01/2006.
Quyết định xuất bản số: 206LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.